ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 32 Februar/März Heft 2/3

Operatorenmethoden in der Gasdynamik*)

Von *Stefan Bergman* in Cambridge (Mass.)

Wenn man für wirbelfreie Unterschallströmungen einer kompressiblen Flüssigkeit die Hodographenmethode verwendet, muß man die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen auf den Fall allgemeinerer linearer partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus erweitern. Für diesen Zweck werden in der vorliegenden Arbeit Integraloperatoren eingeführt. Sie transformieren die Klasse der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen in die Klasse der Stromfunktionen, welche die Unterschallströmungen der idealen Gase um beliebige Profile beschreiben. Die Operatorenmethode wird auf den gemischten Fall ausgedehnt.

By using the hodograph method for irrotational compressible subsonic flow problems, the theory of analytic functions of a complex variable has to be generalized to the case of more general linear partial differential equations of elliptic type. For this purpose, this note deals with integral operators. These operators transform the class of the analytic funktions of a complex variable into the class of the stream functions representing subsonic flows of ideal gases around profils of arbitrary shape. The operator-method is extended to the mixed case.

Si l'on emploie la méthode de l'hodographe pour les écoulements irrotationnels des fluides compressibles á vitesse subsonique, il faut généraliser la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe au cas d'équations aux dérivées partielles linéaires plus générales du type elliptique. Pour ce but, il est introduit, dans cette note, des opérateurs intégrals. Ces opérateurs transforment la classe des fonctions analytiques d'une variable complexe dans la classe des fonctions de courant qui décrivent les écoulements des gaz parfaits autour de profils arbitraires à vitesse subsonique.

При употреблении метода годографа для безвихревых дозвуковых течений сжимаемой жидкости необходимо распространить теорию аналитических функций комплексного переменного на случай более общих линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. С этой целью в предлагаемой статье вводятся интегральные операторы. Они трансформируют класс аналитических функций комплексного переменного в класс функций потока, описывающих дозвуковые течения идеальных газов вокруг произвольных профилей. Метод операторов распространяется на смешанный случай.

§ 1. Partielle Differentialgleichungen in der Theorie zweidimensionaler Gasströmungen

Die Tatsache, daß die mathematische Theorie stationärer zweidimensionaler Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten im wesentlichen identisch ist mit der Untersuchung gewisser Probleme der Funktionentheorie, ermöglicht die Anwendung der hochentwickelten Mittel dieser Theorie. Dies ist einer der Hauptgründe für die beträchtlichen Erfolge der Theorie der inkompressiblen Strömungen. Im Zusammenhang mit wichtigen Fragen, die bei äronautischen Anwendungen auftreten, hat sich in neuerer Zeit ein starkes Interesse am Studium zweidimensionaler Strömungen kompressibler Medien entwickelt. Die Erfolge der Theorie im imkompressiblen Fall legen es nahe, eine Verallgemeinerung der oben erwähnten funktionentheoretischen Methoden für den kompressiblen Fall zu versuchen. Dabei sind gewisse Modifikationen erforderlich: Im inkompressiblen Fall können wir sowohl in der physikalischen x, y-Ebene (Stromfunktion Ψ als Funktion der Ortskoordinaten x, y) als auch in der Hodographenebene (Stromfunktion Ψ als Funktion des Geschwindigkeitsvektors; „Hodographenmethode") arbeiten, denn sowohl $\Psi(x, y)$ als auch $\Psi(\lambda^{\blacktriangle}, \Theta)$ genügen der Laplace-Gleichung (v, Θ = Polarkoordinaten des Geschwindigkeitsvektors, $\lambda^{\blacktriangle} = \lg v$).

Beim Übergang zur Hodographenebene ändern sich viele Beziehungen und gewöhnlich ist es im inkompressiblen Fall bequemer, in der physikalischen Ebene zu arbeiten. Im kompressiblen Fall dagegen genügt Ψ lediglich in der Hodographenebene einer linearen Differentialgleichung, während sich in der x, y-Ebene eine komplizierte nichtlineare Differentialgleichung ergibt. Da die Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen nicht genügend entwickelt ist, erweist sich die Hodographenmethode bei kompressiblen Medien in vielen Fällen als bequemer, obwohl beim Übergang zur Hodographenebene viele Beziehungen erheblich verwickelter werden

*) Vortrag, verlesen auf der wissenschaftlichen Jahrestagung der GaMM am 29. März 1951 in Freiburg i. Br. Die Arbeit wurde unter Auftragsnummer N 5 ori 76/16 NR 043046 (Office of Naval Research) an der Harvard-Universität durchgeführt.

und das Arbeiten in der Hodographenebene bzw. der „logarithmischen Ebene“ verschiedene zusätzliche Schwierigkeiten mit sich bringt.

Die Stromfunktionen sind in der Hodographenebene im allgemeinen auf Riemannschen Flächen definiert und besitzen verschiedene Singularitäten. So sind beispielsweise im inkompressiblen Fall Stromfunktionen $\Psi(\lambda^{\blacktriangle}, \Theta)$, welche in der physikalischen Ebene Strömungen um geschlossene Kurven liefern, im allgemeinen mehrwertig und besitzen Verzweigungspunkte, Pole und logarithmische Singularitäten. Z. B. stellt

$$\Psi = Im\left\{\frac{U}{2}\left[\left(\frac{e^{Z^{\blacktriangle}} - R^2 U}{e^{Z^{\blacktriangle}} - U}\right)^{1/2} + R^2\left(\frac{e^{Z^{\blacktriangle}} - U}{e^{Z^{\blacktriangle}} - R^2 U}\right)^{1/2}\right]\right\}, \qquad Z^{\blacktriangle} = \lambda^{\blacktriangle} - i\Theta \quad . \ . \ (1,1)$$

in der physikalischen Ebene eine Strömung mit der Grundgeschwindigkeit U um eine Ellipse mit dem Dickenverhältnis R^2 dar [11]. Vgl. Bild 1, 2 und 3. Die u, v-Ebene und die $\lambda^{\blacktriangle}$,Θ-Ebene werden zweimal überdeckt. Der Punkt P als Bildpunkt des Punktes $z = \infty$ ist Verzweigungspunkt. Die einander entsprechenden Stromlinien sind in den Abbildungen entsprechend markiert. Die Funktion

$$W(Z^{\blacktriangle}) = -U_{\alpha}\left[\frac{(t-\eta)e^{i\alpha}}{(1+\eta)} + \frac{(1+\eta)e^{-i\alpha}}{(t-\eta)} - \frac{i\Gamma}{2}\lg\left(\frac{t-\eta}{1+\eta}\right)\right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1.2),$$

wobei $t = t(Z^{\blacktriangle})$ eine Lösung von

$$e^{Z^{\blacktriangle}} = -\frac{t^2}{t^2-1}\left[\frac{e^{i\alpha}U}{1+\eta} - \frac{U(1+\eta)e^{-i\alpha}}{(t-\eta)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi\alpha}\frac{1}{(t-\eta)}\right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1.3)$$

ist und U, α, η, Γ Konstanten sind, stellt das komplexe Potential $\Phi + i\Psi$ einer Strömung um ein Joukowski-Profil dar [6, S. 55—57]. Um daher für den kompressiblen Fall Stromfunktionen $\Psi(\lambda^{\blacktriangle}, \Theta)$ mit ähnlichen Eigenschaften wie im inkompressiblen Fall zu erhalten, müssen wir mehrwertige Lösungen der Stromfunktionsdifferentialgleichung (2.3) bzw. (3.2) einführen mit ähnlichen Singularitäten wie im inkompressiblen Fall.

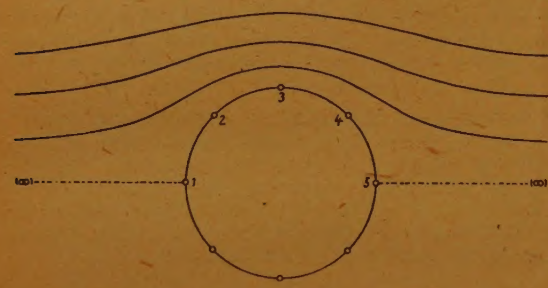


Bild 1. Zirkulationsfreie Strömung um Kreiszylinder

Infolgedessen entsteht die Aufgabe, für die Lösungen $\{u\}$ linearer partieller Differentialgleichungen eine der Theorie der harmonischen Funktionen analoge Theorie zu entwickeln. Die von dem Verfasser in diesem Sinne unternommenen Versuche bezogen sich

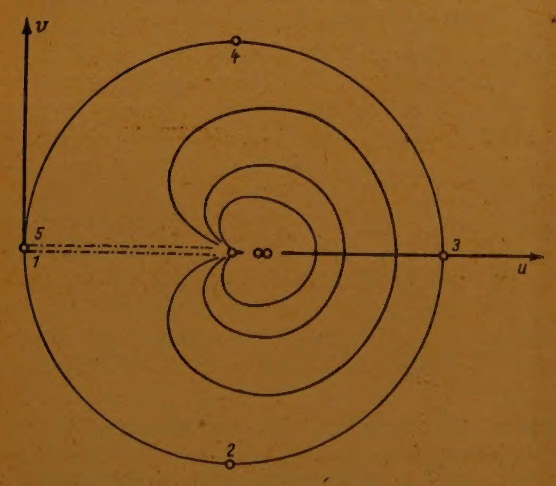


Bild 2. In der Hodographenebene

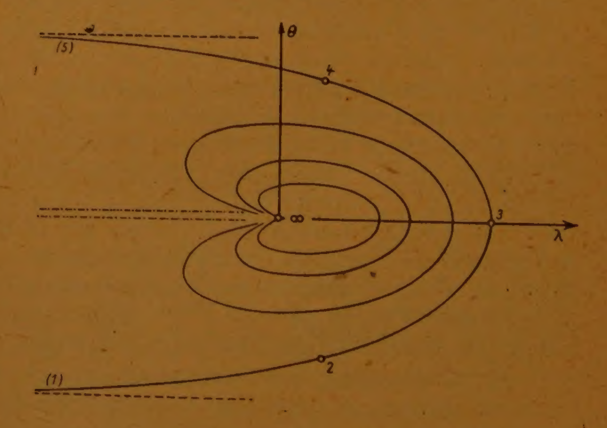


Bild 3. Bild in der logarithmischen Ebene

hauptsächlich auf Verallgemeinerungen von Methoden der Funktionentheorie nach folgenden beiden Richtungen:

1. Methoden, die sich auf den Riemannschen Abbildungssatz gründen oder in enger Beziehung zu ihm stehen,

2. Methoden, die sich auf die Tatsache gründen, daß analytische Funktionen eine Algebra bilden und viele nützliche Eigenschaften besitzen, welche uns gestatten viele Beziehungen zu

entwickeln, sowie auf die Tatsache, daß die Operation *Re* (Nehmen des Realteils) viele Eigenschaften der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen erhält.

Bei 1. ergeben sich die gewünschten Verallgemeinerungen durch Betrachtung der Klasse $L^2(B)$ von Funktionen, die in einem Gebiet B analytisch sind, durch Einführung des Begriffs der Kernfunktion $K_B(z, \bar{\zeta})$ und mit dem Nachweis, daß man auf Grund der Eigenschaften der Kernfunktion die Resultate erhalten kann, die in der klassischen Theorie aus dem Riemannschen Abbildungssatz hergeleitet werden. In vielen Fällen können wir die funktionentheoretischen Sätze in dieser neuen Form unmittelbar verallgemeinern auf den Fall linearer partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, vorausgesetzt, daß die Koeffizienten ausreichende Regularitätseigenschaften besitzen[2]). Diese Methoden sollen jedoch hier nicht weiter diskutiert werden.

Wir wenden uns nun zu den unter 2. genannten Methoden. In der Funktionentheorie werden tiefliegende und interessante Beziehungen hergeleitet, die sich auf solche Fragen beziehen wie z. B. das Studium und die Klassifikation von Singularitäten, Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Funktionselemente und dem Verhalten der Funktionen im großen, das Problem der Darstellung analytischer Funktionen, die auf Riemannschen Flächen definiert sind. Mit Hilfe des Operators „*Re*" können diese Ergebnisse unmittelbar auf harmonische Funktionen übertragen werden. Das Ziel der unter 2. genannten Methoden ist das Studium solcher Operatoren, welche analytische Funktionen in Lösungen gegebener linearer Differentialgleichungen transformieren und die erwähnten oder andere Eigenschaften erhalten. Dabei haben wir zwei Fälle zu unterscheiden: 1. Differentialgleichungen, deren Koeffizienten in dem Bereich, in denen die Lösungen betrachtet werden, analytisch sind; 2. Differentialgleichungen, bei denen die Koeffizienten singulär werden. Bei den Differentialgleichungen der kompressiblen Strömungen handelt es sich um den zweiten Fall (vgl. § 3).

Oft ist der eine oder andere Operator P_k besonders geeignet um zu zeigen, daß eine gewisse Eigenschaft einer analytischen Funktion, auf die ein Operator P_k angewandt wird, erhalten bleibt. Aus diesem Grunde ist es von Interesse, verschiedene Typen von Operatoren aufzustellen und zu untersuchen.

Falls die Koeffizienten a, b, c der Differentialgleichung

$$L(u) \equiv \Delta u + a u_y + b u_x + c u = 0 \quad \text{. . . . . (1.4)}$$

ganze Funktionen von x, y sind, liefert die Operatorenmethode Funktionsklassen, die nur von gewissen Eigenschaften dieser Koeffizienten abhängen oder überhaupt von ihnen unabhängig sind (vgl. z. B. § 3).

Während bei regulären Koeffizienten a, b, c der Integraloperator erster Art für die meisten Zwecke sich als der geeignetste erweist, scheinen bei singulären Koeffizienten andere (als Integraloperatoren zweiter Art bezeichnete) Operatoren von großem Nutzen zu sein, da sie im Gegensatz zu den Integraloperatoren der ersten Art in Punkten, in denen die Koeffizienten der Differentialgleichung singulär sind, definiert werden.

Mit Hilfe der Integraloperatoren lassen sich verschiedene Kapitel der Funktionentheorie mit einer komplexen Veränderlichen nicht nur als Sätze über harmonische Funktionen sondern allgemeiner als Sätze über Lösungen der Differentialgleichungen (1.4) deuten, wobei a, b, c entweder ganze Funktionen sind oder Sigularitäten der in dieser Arbeit betrachteten Art besitzen.

Insbesondere sei hervorgehoben, daß verschiedene Ergebnisse, wie unsere Untersuchung zeigen wird, für eine ganze Klasse von Differentialgleichungen gelten. Wie das Verhalten harmonischer Funktionen typisch ist für das Verhalten der Lösungen der Gl. (1.4) mit ganzen Koeffizienten so existiert im Falle singulärer Koeffizienten, wie sie in dieser Abhandlung betrachtet werden, ein Sonderfall, dessen Theorie besonders einfach ist. Wir werden diesen Fall als „vereinfachten Fall" bezeichnen. Das Verhalten der Lösungen des vereinfachten Falles ist in weitem Umfang typisch für das Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen einer größeren Klasse, nämlich mit Singularitäten, wie wir sie in § 6 beschreiben werden. So gestattet unser Verfahren, den allgemeinen Charakter gewisser Gesetze für die Lösungen der Differentialgleichungen (1.4), deren Koeffizienten entweder ganze Funktionen sind oder gewisse Singularitäten besitzen, evident zu machen. Auch für Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Veränderlichen läßt sich die Operatorenmethode verwenden (vgl. [24]).

Im folgenden werden wir einige der erwähnten Operatoren besprechen. Vor allem werden wir Verfahren angeben zur Konstruktion einer Lösung der Differentialgleichung aus einer

---

[2]) Vgl. S. Bergman: The Kernel Function and Conformal Mapping (Survey Bd. 5, American Mathematical Society), und Bergman-Schiffer: Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. In der ersten Arbeit finden sich weitere Literaturangaben bezüglich der Originalarbeiten von Bergman und Schiffer. Außerdem sei auf die dort zitierten Arbeiten von Garabedian und Nehari hingewiesen.
Vgl. auch S. Bergman: Mémorial des Sciences math., Bd. 106 und 108.

analytischen Funktion und umgekehrt. Der Hauptzweck besteht jedoch nicht nur darin, ein Mittel zur Erzeugung von Lösungen zu haben, sondern es sollen Operatoren gefunden werden, die verschiedene Eigenschaften des Operators „*Re*" behalten.

Anmerkung: Es sei hervorgehoben, daß die Operatoren definiert werden für einen gewissen Bezugspunkt, den wir gewöhnlich in den Nullpunkt ($Z=0$) legen. Bei Änderung des gewählten Bezugspunkts Z ändert sich auch die einer festen analytischen Funktion zugeordnete Lösung, was beim Operator „*Re*" nicht der Fall ist.

§ 2. Der Operator R_2

Wir betrachten eine isentropische Strömung mit der Druck-Dichte-Beziehung $p=\sigma\varrho^k$ ($p=$ Druck. $\varrho=$ Dichte; $\sigma=$ const und $k=$ const). Es empfiehlt sich, die Stromfunktion Ψ in der H, Θ-Ebene zu betrachten, wobei

$$H=\int_{v_1}^{v}\left[1-\frac{k-1}{2}\left(\frac{v}{a_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{k-1}}\frac{dv}{v} \quad \ldots \quad (2.1)$$

und v die allgemeine, v_1 die „kritische", d. h. der Mach-Zahl $M=1$ entsprechende Strömungsgeschwindigkeit ist. a_0 ist die Schallgeschwindigkeit an einem Staupunkt. Dann nehmen die Gleichungen für das Potential $\Phi(H,\Theta)$ und die Stromfunktion $\Psi(H,\Theta)$ die Form an:

$$\Phi_\Theta=\Psi_H, \qquad \Phi_H=-l(H)\Psi_\Theta \quad \ldots \quad (2.1),$$

wobei $\Phi_\Theta=\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}$ usw. gesetzt ist. Durch Elimination von Φ aus (2.2) erhält man für Ψ die Differentialgleichung:

$$S(\Psi)=l(H)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial H^2}=0, \qquad l(H)=\frac{1-M^2}{\varrho^2} \quad \ldots \quad (2.3);$$

(vgl. [4, (42)]). M ist die örtliche Mach-Zahl.

In [2, S. 23—27] und [3, § 2] hat der Verfasser den durch (2.6) definierten Operator $R_2(f)$ eingeführt, um Potentialfunktionen $\Phi(H,\Theta)$ und Stromfunktionen $\Psi(H,\Theta)$ für die Gl. (2.2) zu erzeugen. Wir führen zunächst die Ausdrücke ein:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{n,1}+i\Psi_{n,1}&=(\Theta+iH)^{[n]}\\ &\equiv\left\{\Theta^n-2!\binom{n}{2}\Theta^{n-2}\int_0^H l(H_2)\,dH_2\int_0^{H_2}dH_1+\ldots\right\}\\ &\quad+i\left\{1!\binom{n}{1}\Theta^{n-1}\int_0^H dH_1-3!\binom{n}{3}\Theta^{n-3}\int_0^H dH_3\int_0^{H_3}l(H_2)\,dH_2\int_0^{H_2}dH_1+\ldots\right\}\end{aligned}\right\} \quad (2.4),$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{n,2}+i\Psi_{n,2}&=i\odot(\Theta+iH)^{\{n\}}\\ &\equiv-\left\{1!\binom{n}{1}\Theta^{n-1}\int_0^H l(H_1)\,dH_1-3!\binom{n}{3}\Theta^{n-3}\int_0^H l(H_3)\,dH_3\int_0^{H_3}dH_2\int_0^{H_2}l(H_1)\,dH_1+\ldots\right\}\\ &\quad+i\left\{\Theta^n-2!\binom{n}{2}\Theta^{n-2}\int_0^H dH_2\int_0^{H_2}l(H_1)\,dH_1+\ldots\right\}\end{aligned}\right\} \quad (2.5).$$

Im Spezialfall $l(H)=1$ sind Φ und Ψ durch die Cauchy-Riemannschen Gleichungen verknüpft und können als Potential und Stromfunktion einer inkompressiblen Strömung gedeutet werden. Bei willkürlichem $l(H)$ sind Φ und Ψ durch die Gl. (2.2) verknüpft und können, wenn wir $l(H)=(1-M^2)/\varrho^2$ setzen, als Potential und Stromfunktion einer kompressiblen Strömung gedeutet werden (vgl. [3]).

Wir wollen wie oben bereits geschehen, mit $(\Theta+iH)^{[n]}$ und $i\odot(\Theta+iH)^{\{n\}}$ die Ausdrücke bezeichnen, die aus $(\Theta+iH)^n$ durch die in den Gl. (2.4) und (2.5) angegebenen Prozesse entstehen. Allgemein definieren wir die Operation R_2 durch die Beziehung:

$$R_2\left[\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n+i\beta_n)(\Theta+iH)^n\right]=\sum_{n=1}^{N}\left[\alpha_n(\Theta+iH)^{[n]}+i\odot\beta_n(\Theta+iH)^{\{n\}}\right] \quad \ldots \quad (2.6),$$

wobei α_n, β_n reelle Konstante sind. R_2 kann offenbar auf endliche Summen angewandt werden, in manchen Fällen aber auch auf unendliche Summen, und erzeugt Potential- und Strom-

funktion einer kompressiblen Strömung. Der Operator R_2 hat ein für die späteren Betrachtungen wichtige Eigenschaft: Die Funktionen χ_k mit $k=1, 2$ mögen Entwicklungen der Form:

$$\chi_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \Theta^n \quad \text{für} \quad |\Theta| \leq \Theta_1, \; \Theta_1 > 0 \qquad (2.7),$$

besitzen. Dann konvergiert die Funktion

$$\Psi(H,\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1}^{(2)} \Psi_{n,1}(H,\Theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \Psi_{n,2}(H,\Theta) \qquad (2.8)$$

in dem Gebiet $|\Theta| + \sigma |H| < \Theta_1$, wobei σ hinreichend groß ist und $\Psi(H,\Theta)$ die Eigenschaft hat

$$\Psi(0,\Theta) = \chi_1(\Theta), \qquad \left[\frac{\partial \Psi(H,\Theta)}{\partial H}\right]_{H=0} = \chi_2(\Theta) \qquad (2.9).$$

Bers und Gelbart [17] haben unabhängig vom Verfasser denselben Operator gefunden und in weiteren Veröffentlichungen [19, 20] untersucht. Sie gebrauchen für die erhaltenen Funktionen die Bezeichnung „Σ-monogen".

§ 3. Die Differentialgleichungen der Gasdynamik in der pseudologarithmischen Ebene

Bei Überschallgeschwindigkeit wird die Differentialgleichung (2.3) hyperbolisch; das Verhalten der Lösungen dieser Gleichung ist völlig verschieden vom Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen des elliptischen Typus. Wenn wir daher eine weitgehende Analogie zum inkompressiblen, von der Laplaceschen Gleichung beherrschten Fall zu erhalten wünschen müssen wir uns auf den Unterschallbereich beschränken und haben daher zunächst die Stromfunktionen von Unterschallströmungen in der Hodographenebene zu betrachten. Im Unterschallbereich können wir Gl. (2.3) auf die kanonische Form der elliptischen Differentialgleichungen durch Einführung einer neuen Variablen an Stelle von H bringen. Mit

$$\lambda = \frac{1}{2} \lg \left[\frac{1-\sqrt{1-M^2}}{1+\sqrt{1-M^2}}\right] + \frac{1}{2h} \lg \left[\frac{1+h\sqrt{1-M^2}}{1-h\sqrt{1-M^2}}\right], \qquad h = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \qquad (3.1),$$

(vgl. [4, § 7]) geht Gl. (2.3) über in

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Theta^2} + 4N \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = 0, \qquad N = -\frac{k+1}{8} \frac{M^4}{(1-M^2)^{3/2}} \qquad (3.2).$$

Anmerkung: Wir werden mehrfach $\Psi^* = \frac{\Psi}{H}$ an Stelle von Ψ benützen, wobei[2a])

$$\left.\begin{aligned} H &= (1-M^2)^{-1/4} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2(k-1)}} \\ &= S_0 (-2\lambda)^{-1/6} \left[1 + S_1(-2\lambda)^{2/3} + S_2(-2\lambda)^{4/3} + \ldots\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

gesetzt ist [9, (4.3)]. Ψ^* genügt einer gegenüber (3.2) etwas einfacheren Gleichung, nämlich

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \Theta^2} + 4F\Psi^* = 0 \qquad (3.4)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} 4F &= \frac{(k+1) M^4 \left[-(3k-1) M^4 - 4(3-2k) M^2 + 16\right]}{16 (1-M^2)^3} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left[\alpha_0 + \alpha_1 (-\lambda)^{2/3} + \alpha_2 (-\lambda)^{4/3} + \ldots\right], \qquad \alpha_0 = \frac{5}{36}, \quad \alpha_1 = 0 \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3.5),$$

ist [4, (70), (71), 9].

Für die Potentialfunktion Φ erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2} - 4N \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \qquad (3.6).$$

Anmerkung: Es sei hinzugefügt, daß es in manchen Beispielen vorzuziehen ist auch im „gemischten Fall" (d. h. wenn es sich teilweise um Unter- und teilweise um Überschallgeschwindig-

[2a]) Durch ein Versehen wurde eine Koordinate, vgl. (2.1) und eine Funktion, vgl. (3.3) (die nichts miteinander zu tun haben) mit demselben Buchstaben H bezeichnet. Dies soll zu keiner Verwechslung führen.

keiten handelt) die Veränderlichen λ, Θ zu verwenden. Da für $M>1$ die in Gl. (3.1) eingeführte Funktion λ in

$$-\lambda(M) = -i\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{M^2-1}\right) - \frac{1}{h}\operatorname{arc\,tg}\left(h\sqrt{M^2-1}\right)\right] = i\Lambda(M) \quad . \; . \; . \; (3.7)$$

übergeht, ist es nützlich, die in Frage stehende Funktion zu komplexen Werten des Arguments λ zu verallgemeinern. Wir setzen $\lambda_1+i\Lambda$ an Stelle von λ und lassen dann den unteren Index 1 in λ_1 wieder weg. Betrachtet man dann $\Psi(\lambda+i\Lambda, \Theta)$, so ist $\Lambda=0$ im Unterschallbereich und $\lambda=0$ im Überschallbereich. Im ersten Fall genügt $\Psi(\lambda, \Theta)$ der Gl. (3.2), im zweiten Fall aber der Gleichung

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial\Lambda^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\Theta^2} - 4N_1\frac{\partial\Psi}{\partial\Lambda} = 0, \qquad N_1 = \frac{k+1}{8}\,\frac{M^4}{(M^2-1)^{3/2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3.8).$$

Die Halbebene ($\Lambda=0$, $\lambda<0$, $-\infty<\Theta<\infty$) entspricht dem Unterschallbereich, die Halbebene ($\lambda=0$, $\Lambda>0$, $-\infty<\Theta<\infty$) dem Überschallbereich. Beide Halbebenen hängen längs der Achse $\lambda=0$, $\Lambda=0$ miteinander zusammen.

§ 4. Integraloperatoren zur Erzeugung von Stromfunktionen für Unterschallströmungen

Die neuerdings in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen eingeführten Integraloperatoren [1] stellen ein nützliches Werkzeug zur Erzeugung und Untersuchung von Stromfunktionen für Unterschallströmungen dar. Ein Integraloperator ist ein Operator, der eine Klasse von Funktionen, etwa $\mathfrak{A}$, in die Lösungen einer gegebenen partiellen Differentialgleichung transformiert. In unserem Falle ist dies die Gleichung (3.2) und die Funktionenklasse $\mathfrak{A}$ ist bei Unterschallströmungen die Klasse der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen $Z=\lambda+i\Theta$ oder $\bar{Z}=\lambda-i\Theta$. Der Integraloperator kann entweder in der Form

$$P(f; Z_0) = \int_{t=-1}^{t=1} E(Z', \bar{Z}', t)\cdot f\left(\frac{Z'}{2}(1-t^2)\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.1)$$

mit

$$Z' = Z - Z_0, \qquad \bar{Z}' = \bar{Z} - \bar{Z}_0$$

geschrieben werden oder in der Form

$$\left.\begin{aligned} p(g; Z_0) &= H\left[g(Z') + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2n+1)Q^{(n)}(Z', \bar{Z}')}{2^{2n}\Gamma(n+1)}\int_0^{Z'}\int_0^{Z_1}\cdots\int_0^{Z_{n-1}} g(Z)\,dZ_n\cdots dZ_1\right] \\ &= H\left[g(Z') + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}Q^{(n)}(Z', \bar{Z}')}{2^{2n}B(n, n+1)}\int_0^{Z'}(Z'-\zeta)^{n-1}g(\zeta)\,d\zeta\right] \end{aligned}\right\} \quad (4.2).$$

Dabei sind f und g willkürliche analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen und $E(Z, \bar{Z}, t)$, H und die $Q^{(n)}$ sind gewisse feste Funktionen. Die Funktionen f und g werden als „P-zugeordnete" bzw. „p-zugeordnete" bezüglich der durch die Integraloperatoren erzeugten Lösungen der Differentialgleichung (3.2) bezeichnet. f und g sind dabei durch die Beziehung

$$f(Z) = \frac{(2Z)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\frac{d^{1/2}g(2Z)}{dZ^{1/2}} = \frac{1}{\pi}g(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} Z\sin\vartheta\,\frac{dg(2Z\sin^2\vartheta)}{d(Z\sin^2\vartheta)}\,d\vartheta$$

miteinander verknüpft. Für manche Zwecke erweisen sich Operatoren der Form (4.1), für manche Zwecke solche der Form (4.2) als besser angepaßt. Der Ausdruck

$$E = H\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q^{(n)} Z'^{n} t^{2n}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.3)$$

wird als erzeugende Funktion des Operators P bezeichnet. Z_0 ist der „Bezugspunkt" des Operators. Wir setzen gewöhnlich $Z_0=0$ und schreiben $P(f)$ und $p(g)$ an Stelle von $P(f; 0)$ und $p(g; 0)$.

Zwei Integraloperatoren wurden in der Theorie der kompressiblen Strömungen eingehend untersucht, nämlich die sog. Integraloperatoren erster Art und zweiter Art[3]) P_1 bzw. P_2 (vgl. [1, 2, 9] und [3—7, 9]). Die analytische Funktion $g(Z)$ mit dem Realteil

$$\Psi(Z,\bar{Z}) = h(x,y) = \frac{1}{2}[g(Z)+\bar{g}(\bar{Z})], \qquad Z = x+iy, \qquad \bar{Z} = x-iy \quad . . (4.5),$$

kann erhalten werden, wenn man die Veränderlichen x, y zu komplexen Werten fortsetzt und sie dann in der charakteristischen Ebene $x = iy$ betrachtet.

Man kann zeigen, daß für jede Differentialgleichung $L[\Psi^*] = \frac{1}{4}\Delta\Psi^* + F\Psi^* = 0$, wo F eine ganze Funktion ist, ein Integraloperator existiert (d. h. die $Q^{(n)}$ bestimmt werden können) derart, daß die der Lösung $\Psi^*(Z,\bar{Z})$ entsprechende assoziierte Funktion $g(Z)$ durch die nämliche Beziehung

$$g(Z) = 2\Psi^*(Z,0) + \text{const} \quad . . . . (4.6)$$

gegeben wird wie im Fall der harmonischen Gleichungen. Dieser Operator ist ein Integraloperator erster Art. (Der Integraloperator zweiter Art wird nur in dem Fall, in dem F nur von λ abhängt, definiert.)

Anmerkung: Der Integraloperator erster Art kann auch in der Form

$$p_1(g,Z_0) = H\left[g - \int_{Z_0}^{Z}\int_{\bar{Z}_0}^{\bar{Z}} F\,g\,dZ_1\,d\bar{Z}_1 \int_{Z_0}^{Z}\int_{\bar{Z}_0}^{\bar{Z}}\left(F\int_{Z_0}^{Z_1}\int_{Z_0}^{\bar{Z}_1} F\,g\,dZ_2\,d\bar{Z}_2\right)dZ_1\,d\bar{Z}_1 - \cdots\right] \quad (4.7)$$

geschrieben werden.

Mit Hilfe des Integraloperators erster Art können wir verschiedene Ergebnisse der Funktionentheorie als Sätze über Lösungen partieller Differentialgleichungen deuten. Diese Resultate haben zwar keine unmittelbaren Anwendungen in der Gasdynamik, bieten aber eine interessante Illustration von Ergebnissen, die man mit Hilfe der Operatorenmethode erhalten kann.

1. Die reelle Lösung $\Psi = Re[p_1(g)]$ ist regulär in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet, in dem g regulär ist, und umgekehrt [23, S. 135, 136].

2. Wenn g in $Z = \alpha$ einen Verzweigungspunkt endlicher Ordnung hat, dann hat $p_1(g)$ in α einen Verzweigungspunkt derselben Ordnung. Wenn g in α einen Pol hat, dann wird $p_1(g)$ in α in derselben Ordnung unendlich, hat aber einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung. Wir bezeichnen α als „polähnliche Singularität" [23, S. 318, 319] der reellen Lösung.

3. Für jede Differentialgleichung $L(\Phi) = 0$, vgl. (1.4), gibt es eine Folge komplexer Lösungen $\Phi_\nu(x,y) = U_\nu(x,y) + iV_\nu(x,y)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, von denen jede eine ganze Funktion von x und y ist, die als Analogon von $(x+iy)^\nu$ betrachtet werden kann.

a) Die Φ_ν verhalten sich ähnlich wie die Potenzen für große Werte von ν. Genauer gilt $|\Phi_\nu(x,y) - H(x,y)(x+iy)^\nu| \leq C_1(x,y)(x+iy)^\nu/2(\nu+1)$, wobei H und C_1 ganze, von ν unabhängige Funktionen sind.

b) Jede Lösung Ψ, die in einem Kreis $x^2+y^2 < \varrho^2$ regulär ist, kann dort in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$\Psi = Re\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Phi_\nu\right]$$

entwickelt werden.

c) Jede Lösung Ψ von $L_1(\Psi) \equiv \Delta\Psi + C\Psi = 0$, die in einem einfach zusammenhängenden (abgeschlossenem) Bereich regulär ist, kann dort durch eine Linearkombination $Re\left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)}\Phi_\nu\right]$ der Φ_ν approximiert werden (Analogon des Rungeschen Satzes). Hier bedeutet C eine ganze Funktion von x und y.

4. Es gibt einfache Beziehungen (die wieder Beziehungen in der Funktionentheorie entsprechen) zwischen den Eigenschaften einer Lösung Ψ mit der Reihenentwicklung $\Psi = \sum A_{mn} z^m \bar{z}^n$ ($z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$) im Nullpunkt und dem Verhalten der Folge A_{m0}, $m = 0, 1, 2, \cdots$. Z. B.:

[3]) Gewöhnlich bezeichnen wir mit $P_k(f)$ den Integraloperator k-ter Art ($k = 1,2$). In den Arbeiten [3—7] ist nicht ausdrücklich angegeben, daß P_2 und p_2 (die dort mit P und p bezeichnet werden) Integraloperatoren zweiter Art sind.

Integraloperatoren transformieren analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen in komplexe Lösungen der Diffgl. (3.2) bzw. (3.4). Wenn wir den Integraloperator (d. h. die erzeugende Funktion) ändern, ändern sich die Beziehungen zwischen $Re[P(f)]$ und $Im[P(f)]$.

Der Integraloperator erster Art hat im Falle der Gl. (3.4) folgende wichtige Eigenschaft: Wenn wir die Werte von $Re[P(f)]$ und von $P(f)$ für komplexe Werte der Argumente λ und Θ fortsetzen, d. h. wenn wir Z und $\bar{Z}$ als unabhängige Variable annehmen, dann werden diese Fortsetzungen in den charakteristischen Ebenen $Z = 0$ und $\bar{Z} = 0$ Funktionen sein, die sich nur um eine Konstante unterscheiden.

a) $\sum A_{mn} z^m \bar{z}^n$ ist regulär in jedem Gebiet, in dem $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} z^m$ regulär ist. Man beachte, daß infolgedessen die Lage von Singularitäten von Ψ durch die A_{m0}, $m = 0, 1, 2, \ldots$ bestimmt ist, unabhängig vom Koeffizienten C der Gleichung $L_1(\Psi) = 0$ [23, S. 140].

b) Wenn $\sum_{m=0}^{\infty} |A_{m0}|^2 < \infty$, dann ist $\Psi = \sum A_{mn} z^m \bar{z}^n$ im Einheitskreis $x^2 + y^2 < 1$ regulär und besitzt „fast überall" Grenzwerte für radiale Annäherung an den Einheitskreis. Wieder sind die Punkte, wo die Grenzwerte existieren, unabhängig vom Koeffizienten C [23, S. 141].

5. Man kann unmittelbar verschiedene Sätze der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen übertragen auf den Fall der Lösungen Ψ der Differentialgleichung $L_1(\Psi) = 0$. So liefern beispielsweise die Hadamardschen Bedingungen, daß eine Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} A_{n0} z^n$ in einem Gebiet meromorph ist, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen in den Gliedern der Unterfolge $\{A_{m0}\}$ dafür, daß $\Psi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} z^m z^n$ in einem Gebiet B nur polähnliche Singularitäten hat.

6. Mit Hilfe verschiedener Sätze über die Riemannsche Fläche von Funktionen einer komplexen Veränderlichen kann man die Theorie der Riemannschen Flächen für die Lösungen Ψ von $L_1(\Psi) = 0$ entwickeln. Wenn $\Psi(z, \bar{z})$ in der charakteristischen Ebene $\bar{z} = 0$ eine algebraische Funktion wird, ist die entsprechende Riemannsche Fläche von Ψ eng verwandt mit der Riemannschen Fläche der Funktion g, die mit Ψ durch die Beziehung (4.6) verknüpft ist.

Insbesondere kann man mit Hilfe der Theorie der Integraloperatoren der ersten Art die Theorie der mehrwertigen Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen entwickeln.

§ 5. Der Integraloperator zweiter Art

Bei regulären Koeffizienten der Differentialgleichung ist der Integraloperator erster Art für die meisten Zwecke am geeignetsten. Wenn aber der Koeffizient N in Gl. (3.2) singulär ist und wir das Verhalten der Lösung für $\lambda = -\infty$ oder auf der singulären Linie $\lambda = 0$ untersuchen wollen, ist der Integraloperator zweiter Art von beträchtlichem Nutzen. Im Gegensatz zum Fall der Integraloperatoren erster Art, wo die Koeffizienten $Q^{(n)}$ Funktionen von zwei Variablen λ und Θ sind, hängt in diesem Fall $Q^{(n)}$ nur von λ ab, so daß die Tabulierung einfacher und der Operator für numerische Rechnungen besonders geeignet ist. Die Operatoren zweiter Art sind definiert für den Fall, in dem der Koeffizient N nur von $\lambda = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$ abhängt; sie konvergieren nur in Unterbereichen des Regularitätsbereichs von N. Sie haben jedoch den Vorteil, daß einige von ihnen auch noch auf der singulären Linie $\lambda = 0$ von N und für $\lambda = -\infty$ definiert sind. Wenn man λ ins Komplexe fortsetzt, d. h. λ durch $\lambda + i\Lambda$ ersetzt (vgl. Schluß des § 3), dann ist im Unterschallgebiet $\Lambda = 0$ und die Zugeordnete $f(\lambda + i\Theta)$ ist eine Funktion einer *komplexen* Veränderlichen, während im Überschallgebiet $\lambda = 0$ und $f(i(\Lambda + \Theta)) = s(\Lambda + \Theta)$ eine Funktion einer *reellen* Veränderlichen ist (vgl. Bild 4). Auf diese Weise wird auch für die Untersuchung des gemischten Falles der Operator zweiter Art herangezogen. (9, 11, 12). In dem Spezialfall, in dem $N = \frac{1}{6(Z + \bar{Z})}$ gilt (wir werden ihn als den „vereinfachten Fall" oder als Tricomi-Gleichung bezeichnen), ist die erzeugende Funktion $E \equiv E_s^+$ des Operators zweiter Art die hypergeometrische Funktion von $u = -\frac{t^2(\lambda^+ + i\Theta)}{2\lambda^+}$. In diesem Fall wird die Funktion $l(H)$ in (2.2) und (2.3) $l(H) = -CH$, λ^+ und H sind verknüpft durch die Beziehung $-H = C(-\lambda^+)^{2/3}$ und es ist $4F^+ = \frac{-5}{36\lambda^{+2}}$ [9, S. 862]. Die Theorie der hypergeometrischen Funktionen ist genügend ausgebaut und wir können verschiedene Eigenschaften der hypergeometrischen Funktionen benützen um eine Theorie der Lösungen der Gl. (3.2) im vereinfachten Fall zu entwickeln. Wenn man den in diesem Paragraph beschriebenen Operator benützt, lassen sich

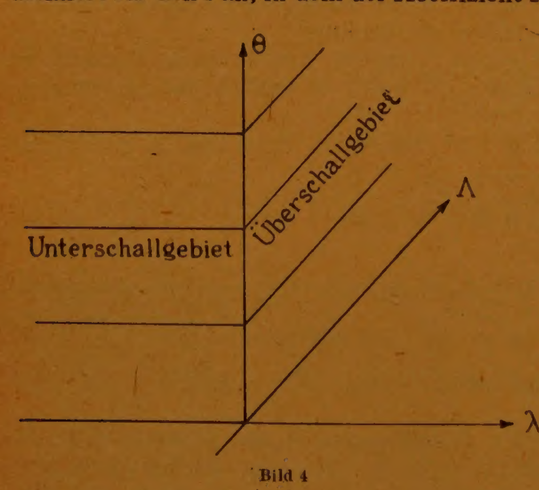


Bild 4

verschiedene Sätze ähnlichen Charakters, wie sie im Paragraph 4 angegeben sind, für die Lösung der „vereinfachten" Gl. (2.3) aufstellen [11, 12]. Der in diesem Paragraph betrachtete Sonderfall gibt uns ein Muster, wie man im allgemeinen Fall vorzugehen hat; die Theorie der Integraloperatoren zweiter Art ist eine Verallgemeinerung bekannter Sätze über hypergeometrische Reihen auf den allgemeinen Fall, in dem E nicht auf eine hypergeometrische Funktion einer geeignet gewählten Kombination von Veränderlichen zurückgeführt werden kann.

Insbesondere gestattet uns die Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung, die erzeugende Funktion in der Form von zwei unendlichen Reihen darzustellen, die für $|(\lambda^+ + i\Theta)/(-2\lambda^+)| < 1$ bzw. $|(\lambda^+ + i\Theta)/(-2\lambda^+)| > 1$ konvergieren. In § 6 werden wir analoge Reihen im allgemeinen Fall herleiten. Die erzeugende Funktion des Integraloperators zweiter Art ist in diesem Fall:

$$E^{*+} = A_1 \cdot \mathrm{F}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, u\right) + B_1 \cdot \sqrt{u}\,\mathrm{F}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, u\right) \quad \text{(5.1)},$$

wo A_1 und B_1 Konstanten sind. F ist die hypergeometrische Funktion. (5.1) kann dargestellt werden durch:

$$E^{*+(k)}_{2,1} = \sum_{n=0}^{\infty} (t^2 Z^+)^{n-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}} Q^{+(n,k)}(2\lambda^+), \qquad (k = 1, 2;\; Z^+ = \lambda^+ + i\Theta) \quad \text{(5.2)}$$

für $|Z^+/2\lambda^+| < 1$ und

$$E^{*+(k)}_{2,2} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{+(n,k)}(2\lambda^+)/(-t^2 Z^+)^{n-\frac{1}{2}+\frac{2k}{3}} \qquad (k = 1, 2) \quad \text{(5.3)}$$

für $|Z^+/2\lambda^+| > 1$, wobei

$$\left.\begin{aligned} Q^{+(n,1)}(2\lambda^+) &= \frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{6}+n-1\right)\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}+1\right)\cdots\left(\frac{5}{6}+n-1\right)}{n!\,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)(2\lambda^+)^n}, \\ Q^{+(0,1)}(2\lambda^+) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(5.4)}$$

und

$$q^{+(n,1)}(2\lambda^+) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{6}+n-1\right)\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{2}{3}+n-1\right)(-2\lambda^+)^{n+\frac{1}{6}}}{n!\,\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}+n-1\right)} \quad \text{(5.5)},$$

$$q^{+(n,2)}(2\lambda^+) = \frac{\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}+1\right)\cdots\left(\frac{5}{6}+n-1\right)\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{4}{3}+n-1\right)(-2\lambda^+)^{n+\frac{5}{6}}}{n!\,\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{5}{3}+n-1\right)} \quad \text{(5.6)}.$$

$Q^{+(n,2)}(2\lambda^+)$ brauchte nicht mit angeführt zu werden, da der entsprechende Operator nach Integration identisch Null liefert [9, § 4, 11].

In dem vereinfachten Fall befriedigt die erzeugende Funktion E^+ zweiter Art, betrachtet als eine Funktion von u, die hypergeometrische Gleichung, d. h eine gewöhnliche Differentialgleichung von Fuchsschem Typus. Es war nicht möglich in dem allgemeinen Fall die entsprechende Gleichung für die Erzeugende auf eine gewöhnliche Gleichung zu reduzieren. Andrerseits kann man zeigen, daß im allgemeinen Fall die erzeugende Funktion viele gleiche Eigenschaften besitzt, wie die Erzeugende der vereinfachten Gleichung[3a]) [12].

§ 6. Der Integraloperator zweiter Art für die allgemeine Gleichung

Wir wollen nun zeigen, daß wir in gewissem Umfang dieselbe Lage bei den Gleichungen des gemischten Typus haben, die in der Theorie der kompressiblen Strömungen auftreten, wo der vereinfachte Fall als ein Muster für die allgemeine Theorie betrachtet werden kann. Es wird angenommen, daß N in (3.2) eine Entwicklung der Form

$$N(\lambda) = (-\lambda)^{-1}\left[-\frac{1}{12} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu (-\lambda)^{\frac{2\nu}{3}}\right], \qquad \beta_1 \geq 0 \quad \text{(6.1)}$$

[3a]) Diese Betrachtungen verallgemeinern gewisser Kapitel der Theorie der Gleichungen von Fuchsschem Typus auf den Fall von *partiellen* Differentialgleichungen.

hat, die für $-\lambda_0 < \lambda < 0$ gilt. Wenn r_0 der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu x^\nu$ ist, dann ergibt sich $\lambda_0 = r_0^{3/2}$.

Wir stellen jetzt folgende Forderungen an die Funktion $N(\lambda)$: Wir sagen, daß die Funktion $N(\lambda)$ der reellen Veränderlichen λ zur Klasse $\mathfrak{N}$ gehört, wenn

$N(\lambda)$ eine analytische Funktion für $-\infty < \lambda < 0$ und reell für $\lambda < 0$ ist (6.2a);

$N(\lambda)$ in der Umgebung von $\lambda = 0$ eine Entwicklung der Form (6.1) besitzt, die für $-\lambda_0 < \lambda < 0$ gilt mit $0 < \lambda_0 \leq \infty$ (6.2b);

das Integral $\exp\left[-\int_{-\infty}^{\lambda} 2\,N(t)\,dt\right] = H(\lambda)$ für alle λ existiert . . . . (6.2c).

Unter diesen Annahmen läßt sich zeigen, daß $\lim_{\lambda\to 0} \{(-\lambda)^{1/6} H(\lambda)\}$ existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit S_0 und fordern außerdem noch

$$S_0 > 0 \quad \ldots \quad (6.2\text{d}).$$

Es seien

$$E_{1,1}^{*(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (t^2 Z)^{n-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}} Q^{(n,k)}(2\lambda), \qquad (k = 1, 2;\ \lambda < 0,\ |\Theta|^2 < 3|\lambda|^2) \quad \ldots \quad (6.3)$$

und

$$E_{2,2}^{*(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2 Z)^{-n+\frac{1}{2}+\frac{2k}{3}} q^{(n,k)}(2\lambda), \qquad (k = 1, 2;\ |\Theta|^2 > 3|\lambda|^2) \quad \ldots \quad (6.4),$$

wo die $Q^{(n,k)}$ durch die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} &(2n+1)\,Q_\lambda^{(n+1,1)} + Q_{\lambda\lambda}^{(n,1)} + 4FQ^{(n,1)} = 0, \qquad Q^{(n+1,1)}(-\infty) = 0, \\ &Q_\lambda^{(1,1)} = -4F, \qquad F(\lambda) = -N^2(\lambda) - \frac{1}{2} N_\lambda(\lambda), \qquad Q^{(0,k)} = (2\lambda)^{\frac{1-k}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (6.5)$$

und die $q^{(n,k)}$ durch die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} &q_{\lambda\lambda}^{(0,k)} + 4\,F(\lambda)\,q^{(0,k)} = 0, \\ &2\left(n + \frac{2}{3}k\right) q_\lambda^{(n,k)} + q_{\lambda\lambda}^{(n+1,k)} + 4\,F(\lambda)\,q^{(n+1,k)} = 0 \end{aligned}\right\} (k = 1, 2) \quad \ldots \quad (6.6)$$

verknüpft sind und die in (6.8a) bis (6.8d) gestellten Anfangsbedingungen erfüllen.

Für die $q^{(n,k)}(\lambda)$ erhalten wir Reihenentwicklungen

$$q^{(n,k)}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\lambda^{(n,k)} (-\lambda)^{n-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}(k+\nu)} \quad \ldots \quad (6.7)$$

mit

$$c_0^{(0,1)} = 2^{1/6}, \qquad c_0^{(n,1)} = q^{+(n,1)}\, 2^{n-\frac{1}{6}} \quad [\text{s. } (5.5), (5.6)] \quad \ldots \quad (6.8\text{a}),$$

$$c_1^{(n,1)} = 0 \quad \ldots \quad (6.8\text{b}),$$

$$c_0^{(n,2)} = q^{+(n,2)} \cdot 2^{n+\frac{5}{6}} \quad \ldots \quad (6.8\text{c}),$$

$$c_0^{(0,2)} = 2^{5/6} \quad \ldots \quad (6.8\text{d}).$$

Dann erhalten wir für die erzeugende Funktion zweiter Art

$$E_{2,\nu}^{(k)} = H\,E_{2,\nu}^{*(k)} \qquad (\nu = 1, 2) \quad \ldots \quad (6.9)$$

(6.3) konvergiert für $|\Theta|^2 < 3|\lambda|^2$, (6.4) für $|\Theta|^2 > 3|\lambda|^2$. (6.3) und (6.4) stellen die Verallgemeinerung der im vereinfachten Fall erhaltenen Entwicklungen (5.2) und (5.3) auf den allgemeinen Fall dar [9, § 5; 12].

§ 7. Der modifizierte Integraloperator

Bei der Verwendung der Operatoren p_1 und $p_{2,1}$[4]) zur Erzeugung von Strömungen kompressibler Medien sind gewisse Modifikationen nötig:

Die Integraloperatoren erster und zweiter Art erzeugen Stromfunktionen, die in den meisten Fällen die nämlichen allgemeinen Eigenschaften besitzen wie die Funktionen, auf die

---

[4]) Siehe (4.2); $p_{2,1}$ wird ebenso wie p_1 gebildet, jedoch sind die $Q^{(n)}(Z;\bar{Z})$ durch $Q^{(n)}(\lambda)$ zu ersetzen. Vgl. (6.5).

sie angewandt werden. Wenn beispielsweise die Funktion g einen Verzweigungspunkt n-ter Ordnung hat, wird die erzeugte Lösung der Stromfunktionsgleichung einen Verzweigungspunkt von derselben Ordnung und im gleichen Punkt wie g haben. Es gibt jedoch einen wichtigen Ausnahmefall, der eine Modifikation bei der Anwendung des Verfahrens in der Gasdynamik erfordert. Wenn wir nämlich den Operator p auf eine Funktion g anwenden, die einen Pol oder eine Singularität besitzt, dann führt der Operator eine wesentliche Modifikation des Verhaltens der Lösung in dem in Frage stehenden singulären Punkt herbei derart, daß sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von $p\,[\lg (Z - Z_0)]$ und $p\,[(Z - Z_0)^{-n}]$, wobei n eine positive ganze Zahl ist, im Punkt $Z = Z_0$ unendlich-vielwertig werden. Da es beim Übergang zur physikalischen Ebene wichtig ist Singularitäten zu haben, für welche wenigstens eine der Funktionen Φ oder Ψ im singulären Punkt einwertig ist, müssen wir unsern Operator in der folgenden Weise modifizieren:

Wenn wir eine Funktion g mit einem Pol oder einer logarithmischen Singularität haben, zerlegen wir sie in zwei Teile. Der erste Teil g_1 soll weder Pole noch logarithmische Singularitäten haben, der zweite Teil sei

$$\sum_{k=1}^{m} A_k (Z - Z_k)^{-v_k} + \sum_{k=m+1}^{n} A_k \lg (Z - Z_k) \qquad (7.1),$$

wobei A_k Konstante und v_k ganze positive Zahlen sind.

Mittels des Integraloperators erster Art p_1 erhalten wir eine Lösung von (3.2), etwa $\Psi_1 = Im\,[p_1(\Theta)]$.

Durch Einführung sog. Fundamentallösungen:

$$\Psi^{(L,1)}(Z; Z_k) = A(Z; Z_k) \lg |Z - Z_k| + B(Z; Z_k) \qquad (7.2)$$

von (3.2) oder (3.4), wo A und B gewisse einwertige Funktionen sind, die man leicht bestimmen kann, erhält man Lösungen von (3.2) oder (3.4), die dasselbe Verhalten zeigen wie $\lg |Z - Z_k|$. Siehe [4, S. 45; 6, S. 43; 7, 8]. Differenziert man diese Funktion nach dem Realteil und Imaginärteil des Parameters Z_k, so bekommt man einwertige Funktionen $\Psi^{(1,1)}$ und $\Psi^{(1,2)}$ mit einer Unendlichkeitsstelle erster Ordnung. Wir bezeichnen mit $\Psi^{(L,2)}(Z; Z_k)$ die Stromfunktion, die der Grundlösung $\Phi^{(L,2)}(Z; Z_k) \equiv C(Z; Z_k) \lg |Z - Z_k| + D(Z; Z_k)$ der Potentialgleichung entspricht. Vgl. (5.2b), (2.8) und (2.15a) von [8].

Anmerkung: Die durch $\Psi^{(L,1)}$, $\Psi^{(L,2)}$, $\Psi^{(1,1)}$ und $\Psi^{(1,2)}$ erzeugten Strömungen haben eine einfache physikalische Bedeutung. $\Psi^{(L,1)} + C\Psi^{(1,2)}$, wobei C eine passend gewählte Konstante ist, liefert einen Wirbel im Unendlichen in der physikalischen Ebene, $\Psi^{(L,2)} + C_3\Psi^{(1,1)}$ eine Quelle oder Senke. Aus den Punkten, in denen $C_1\Psi^{(1,1)} + C_2\Psi^{(1,2)}$ unendlich wird, ergeben sich die Polarkoordinaten eines Dipols im Unendlichen (vgl. [8], [13]).

Fügt man zu $\Psi_1 = Im\,[p_1(g_1)]$ die Funktionen mit den oben beschriebenen Singularitäten hinzu, so erhält man eine Lösung der Stromfunktionsgleichung mit denselben Eigenschaften wie g. Wir werden diesen Prozeß zur Bestimmung von Stromfunktionen eines kompressiblen Mediums als modifizierten Integraloperator bezeichnen.

Bei nicht symmetrischen Strömungsfeldern mit dem Geschwindigkeitsvektor $V_0 e^{i\Theta_0}$ im Unendlichen ($z = \infty$) erhält man die Stromfunktion in der λ, Θ-Ebene in der Form

$$\Psi = A_0 \Psi^{(L,1)}(Z; Z_0) + B_0 \Psi^{(L,2)}(Z; Z_0) + A_1 \Psi^{(1,1)}(Z; Z_0) + A_2 \Psi^{(1,2)}(Z; Z_0) + \Psi_1(Z) \quad (7.3),$$

wobei $Z_0 = \lambda(v_0) + i\Theta_0$ ist und $\Psi_1(Z)$ eine Funktion bedeutet, die Verzweigungspunkte positiver Ordnung als einzige Singularitäten besitzt und durch den Operator aus einer passend gewählten Funktion $[g(Z) - g_1(Z)]$ einen komplexen Veränderlichen gewonnen werden kann.

Bei symmetrischen Strömungsfeldern vereinfacht sich die Darstellung (7.3). In diesem Falle kann man den Operator p_2 unmittelbar auf die Funktion

$$g(Z) = \sum_{\nu=-1}^{\infty} A_\nu (Z - Z_0)^{\nu/2} \qquad (7.4)$$

anwenden. So ist in [14] der Operator p_2 beispielsweise auf die Funktion (1.1) angewandt worden. Man erhält dann in der Strömungsebene eine Strömung um einen nahezu elliptischen Zylinder. In [11] ist ein Beispiel einer Strömung mit Schallgeschwindigkeitsdurchgang (für den vereinfachten Fall) gegeben.

Die Einführung des modifizierten Integraloperators ermöglicht uns die Entwicklung einer Theorie kompressibler Strömungen, die im Unterschallbereich der Theorie der inkompressiblen Strömungen (bei Benützung der Hodographenebene) weitgehend gleicht. Im folgenden soll eine Verallgemeinerung von zwei Sätzen der Theorie der inkompressiblen Strömungen erörtert werden.

I. Bedingungen dafür, daß eine in der λ, Θ-Ebene definierte Stromfunktion in der Strömungsebene eine Strömung um eine geschlossene Kurve liefert

Bei der inkompressiblen Strömung $\left(\frac{dw}{dZ} = \text{Strömungsgeschwindigkeit} = ve^{i\Theta}\right)$ hat man

$$Z = \int e^{-Z^\blacktriangle} dn = \int e^{-Z^\blacktriangle} \frac{dw}{dZ^\blacktriangle} dZ^\blacktriangle \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7.5)$$

mit $w = \Phi + i\Psi$, $Z^\blacktriangle = \lambda^\blacktriangle - i\Theta$, $\lambda^\blacktriangle = \lg v$. Nimmt man dann die reellen und imaginären Teile und berücksichtigt die Cauchy-Riemannschen Gleichungen für Φ und Ψ, so erhält man für x und y Formeln, die den im kompressiblen Fall geltenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{\varrho} \left\{ \left[\frac{1-M^2}{v^2} \cos\Theta \cdot \Psi_\Theta - \frac{\sin\Theta}{v} \cdot \Psi_v \right] dv + \left[\cos\Theta \cdot \Psi_v - \frac{\sin\Theta}{v} \cdot \Psi_\Theta \right] d\Theta \right\}, \\ y &= \int \frac{1}{\varrho} \left\{ \left[-\frac{1-M^2}{v^2} \sin\Theta \cdot \Psi_\Theta + \frac{\cos\Theta}{v} \cdot \Psi_v \right] dv + \left[\sin\Theta \cdot \Psi_v + \frac{\cos\Theta}{v} \Psi_\Theta \right] d\Theta \right\} \end{aligned}\right\} \quad (7.5\text{a})$$

entsprechen.

Wenn nun der Definitionsbereich B einer Stromfunktion Ψ (in der λ, Θ-Ebene) einfach zusammenhängend ist, dann ist dafür, daß die Randkurve des Bildes von B in der x, y-Ebene eine geschlossene Kurve ist, notwendig und hinreichend, daß die Summe der Residuen der Singularitäten $\left[e^{-Z^\blacktriangle} \frac{dw}{dZ^\blacktriangle}\right]$ im Bereich B gleich Null ist.

Dieses Ergebnis kann auf den Fall der kompressiblen Strömung verallgemeinert werden. Da die Integranden von (7.5a) vollständige Differentiale sind, hängen die Werte der Integrale vom Integrationsweg nicht ab, vorausgesetzt, daß kein singulärer Punkt überschritten wird. Wenn wir daher in (7.5a) die Fundamentallösung (7.2) bzw. ihre Ableitungen nach $Re\, Z_0$ oder $Im\, Z_0$ einsetzen, können wir jeder solchen Singularität zwei reelle Zahlen

$$T^{(1)}(Z_0) \quad \text{und} \quad T^{(2)}(Z_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7.6)$$

zuordnen. (Im inkompressiblen Fall sind diese Zahlen der Realteil und Imaginärteil des Residuums in Z_0.) Wenn der Bereich B mit der Randkurve b einfach zusammenhängend ist, hat man

$$\sum_{\nu=0}^{2} A_\nu T_\nu^{(s)}(Z_0) = 0, \qquad s = 1, 2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7.7)$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Bild von b in der x, y-Ebene eine geschlossene Kurve ist. Dabei sind die A_ν die in (7.3) auftretenden Koeffizienten [4, § 14; 6; 8, § 6].

II. Verallgemeinerung der Blasiusschen Formeln

Eine weitere Anwendung unserer Methode ist eine Verallgemeinerung der Blasiusschen Formeln für den Auftrieb F und das Moment M, die auf den umströmten Körper ausgeübt werden. Wir nehmen an, ein Profil B sei in eine kompressible Strömung eingetaucht und die Stromfunktion in der λ, Θ-Ebene habe die Form (7.3). Dann erhalten wir für die auf den Körper B wirkende Kraft:

$$F = F(\Psi) = -\int_C v(\lambda) e^{i\Theta} d\Psi + i\sigma \int_C \left[1 - \frac{k-1}{2} v^2(\lambda)\right]^{\frac{k}{k-1}} dZ \quad \ldots \ldots (7.8)$$

mit

$$dZ = \frac{1}{\varrho} e^{i\Theta} \left\{ \left[-\frac{1-M^2}{v} \Psi_\Theta \frac{dv}{d\lambda} + i \frac{\Psi_\lambda}{v} \right] d\lambda + \left[\Psi_\lambda \Big/ \frac{dv}{d\lambda} + i \frac{\Psi_\Theta}{v} \right] d\Theta \right\} \quad \ldots (7.9).$$

σ ist die in § 2 (erster Absatz) eingeführte Konstante.

C ist eine hinreichend glatte und kleine geschlossene Kurve um den Punkt Z_0. In Verallgemeinerung der Blasiusschen Formeln erhält man so im kompressiblen Fall:

$$F = A_0 F(\Psi^{(L)}) + A_1 F(\Psi^{(1,1)}) + A_2 F(\Psi^{(1,2)}) \quad \ldots \ldots (7.10).$$

Dabei sind $F(\Psi^{(L)}), \ldots$ Vektoren, die sich dadurch ergeben, daß man in (7.8) an Stelle von Ψ die Funktionen $\Psi^{(L)}, \ldots$ einsetzt. Eine analoge Formel ergibt sich für das Moment M [8; § 6].

Literaturverzeichnis.

[1] Stefan Bergman: Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen. I. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. Bd. 2 (1937), pp. 1169—1198.

[2] Stefan Bergman: The hodograph method in the theory of compressible fluids. Supplement to Fluid dynamics by von Mises and Friedrichs, Brown University, 1942.

[3] Stefan Bergman: A formula for the stream function of certain flows. Proc. nat. Acad. Sci. USA. Bd. 29 (1943), pp. 276—281.
[4] Stefan Bergman: On two-dimensional flows of compressible fluids. NACA Technical Note No. 972, 1945.
[5] Stefan Bergman: Graphical and analytic methods for the determination of a flow of a compressible fluid around an obstacle. NACA Technical Note No. 973, 1945.
[6] Stefan Bergman: Methods for the determination and computation of flow patterns of a compressible fluid. NACA Technical Note No. 1018, 1946.
[7] Stefan Bergman: On supersonic and partially supersonic flows. NACA Technical Note No. 1096, 1946.
[8] Stefan Bergman: Two-dimensional subsonic flows of a compressible fluid and their singularities. Trans. Amer. Math. Soc. Bd. 62 (1947), pp. 452—498.
[9] Stefan Bergman: Two-dimensional transonic flow patterns. Amer. J. Math. Bd. 70 (1948), pp. 856 bis 891.
[10] Stefan Bergman: Functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation. Duke Math. J. Bd. 14 (1947), pp. 349—366.
[11] Stefan Bergman: On tables for the determination of transonic flow patterns. Hans Reissner Anniversary Volume, New York 1949, pp. 13—36.
[12] Stefan Bergman: On solutions of linear partial differential equations of mixed type (to appear).
[13] G. S. S. Ludford: The behavior at infinity of the potential function of a two dimensional subsonic compressible flow. Journal of Mathematics and Physics. Bd. 30 (1951).
[14] Stefan Bergman and B. Epstein: Determination of a compressible fluid flow past an oval shaped obstacle. J. Math. Physics. Bd. 26 (1948), pp. 105—222.
[15] Stefan Bergman and L. Greenstone: Numerical determination by use of special computational devises of an integral operator in the theory of compressible fluids. I. Determination of the coefficients of the integral operator by the use of punch card machines. J. Math. Physics. Bd. 26 (1947), pp. 1—9.
[16] Stefan Bergman and M. Schiffer: A representation of Green's and Neumann's functions in the theorie of partial differential equations of second order. Duke Math. J. Bd. 14 (1947), pp. 609—638.
[17] Stefan Bergman and M. Schiffer: On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations. Bull. Amer. Soc. Bd. 53 (1947), pp. 1141—1151.
[18] Stefan Bergman and M. Schiffer: Kernel functions in the theorie of partial differential equations of elliptic type. Duke Math. J. Bd. 15 (1948), pp. 535—566.
[19] L. Bers and A. Gelbart: On a class of differential equations in mechanics of continua. Quart. of Applied Mathematics. Bd. 1 (1943), pp. 168—188.
[20] L. Bers and A. Gelbart: On a class of functions defined by partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. Bd. 56 (1944), pp. 67—93.
[21] L. Bers and A. Gelbart: On generalized Laplace transformations. Ann. of Math., Bd. 48 (1947), pp. 342 bis 357.
[22] R. v. Mises and M. Schiffer: On Bergman's integration method in two-dimensional compressible flow. Advances in Applied Mechanics. Bd. 1 (1948), pp. 249—285.
[23] Stefan Bergman: Linear operators in the theory of partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943), pp. 130—155.
[24] Stefan Bergman: On solutions with algebraic character of linear partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. Bd. 68 (1950), pp. 461—507.
[25] Josephine Mitchell: Some properties of solutions of partial differential equations given by their series development. Duke Math. J. Bd. 13 (1946), pp. 87—104.
[26] M. Eichler: On the differential equations $U_{xx} + U_{yy} + N(x)u = 0$. Trans. Amer. Math. Soc. Bd. 65, No. 2 (March, 1949), pp. 259—278.
[27] M. Eichler: Analytic functions in three-dimensional Riemannian spaces. Duke Math. J. Bd. 16, No. 2 (Juni 1949).
[28] Lennart Carleson: On generalyzed analytic functions and value distribution. (In Vorbereitung.)
[29] Morris Marden: A recurrence formula for the solutions of certain linear partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. Bd. 50 (1944), pp. 209—217.
[30] Morris Marden: Axisymmetric harmonic vectors. Amer. J. Math. Bd. 67 (1945), pp. 109—122.
[31] K. L. Nielsen und B. P. Ramsay: On particular solutions of linear partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. Bd. 49 (1943), pp. 156—162.
[32] K. L. Nielsen: Some properties of functions satisfying partial differential equations of elliptic type. Duke Math. J. Bd. 11 (1944), pp. 121—137.
[33] A. Temliakoff: Sur la croissance des fonctions satisfaisant aux équations linéaires aux dérivées partielles et du second ordre. C. R. Acad. Sci., Paris. Bd. 200 (1935), pp. 799—801.
[34] A. Temliakoff: Zu dem Wachstumsproblem der harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes. Matematiceski Sbornik (Recueil Mathématique) Bd. 42 (1935), pp. 707—718.
[35] A. Temliakoff: Über harmonische Funktionen von drei Veränderlichen mit einer meromorphen zugehörigen Funktion. Matematiceski Sbornik (Recueil Mathématique), N. S. Bd. 5 (47), (1939), pp. 487—495.
[36] Benham M. Ingersoll: The regularity domains of solutions of linear partial differential in terms of the series development of the solution. Duke Math. J. Bd. 15 (1948), pp. 1045—1056.
[37] Stefan Bergman: Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher, die die Differentialgleichung $\Delta V + V = 0$ befriedigen. Mathematische Zeitschrift Bd. 32 (1930), pp. 386—606.
[38] Herman Chernoff: Complex solutions of partial differential equations. Amer. J. Math. Bd. 68 (1946), pp. 455—478.

Eingegangen am 7. 4. 1951.

Ein Beitrag zur Statik der Kreisplatten

Von *H. Jung* in Stuttgart-N

Durch die Anwendung der Hankeltransformation ist es gelungen, Differentialgleichungen auf einem neuen einfachen Weg zu lösen. Das Verfahren wurde zur Bestimmung der Durchbiegung von Kreisplatten bei rotationssymmetrischer Lastverteilung herangezogen. Auf demselben Weg lassen sich Verfahren zur Behandlung der Druckverteilung unter Kreisplatten, die auf einem elastischen Medium aufliegen, finden. Ebenfalls kann auf diesem Weg die „Wärmebeulung von Kreisplatten" behandelt werden.

Applying the Hankel transformation, it is recently possible to solve diffferential equations in an easy way. The author makes use of this method to determine the deflexion of circular plates under rotationally-symmetrical strain. The same method is applicable to the determination of the pressure distribution under elastically bedded circular plates. The "buckling by heat" of circular plates can be treated in the same way.

En employant la transformation de Hankel on a récemment réussi à résoudre des équations différentielles d'une manière nouvelle et simple. La méthode est employée à la détermination du courbement de plaques circulaires à une distribution de charge symmétrique à la rotation. De la même manière on peut trouver des méthodes pour la manipulation de la distribution de la pression sous des plaques circulaires couchées élastiquement. La „bosselure" de plaques circulaires causée par la chaleur peut être traitée de la même manière.

Применение трансформации Ганкеля дало возможность решения дифференциальных уравнений новым простым путем. Слособ был привлечен для определения прогиба круговых пластин при вращательно-симметрическом распределении нагрузки. Тем же самым путем могут быть найдены способы трактовки распределения давления между круговыми пластинми, покоящимися на упругой среде. Этим же путем может быть исследовано „тепловое мятье круговых пластин".

1. Einleitung

Wird eine Kreisplatte durch eine rotationssymmetrische Belastung normal zu ihrer Mittelfläche beansprucht, so erhält man die Durchbiegung $f(r)$ aus der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta f(r) = \frac{p(r)}{N} \quad \ldots \quad (1).$$

In (1) bedeuten $f(r)$ die Durchbiegung,

$p(r)$ die Belastung,

$N = \dfrac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)}$ die Biegesteifigkeit,

$\Delta = \dfrac{d^2}{d r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{d r}$.

Wendet man auf (1) die Hankeltransformation (Ziffer 2) an, so läßt sich wie in Ziffer 3 gezeigt wird, ein neues Verfahren zur Berechnung der Durchbiegung aufbauen. Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber dem Verfahren von Pichler[1]) ist, daß in die Rechnung nur die Randbedingungen der Platte eingehen. In Ziffer 4 werden einige wichtige Unterfunktionen für Belastungen hergeleitet und der Zusammenhang dieser Unterfunktionen mit den in Ziffer 3 auftretenden Integrationskonstanten gegeben. Wie die auftretenden Integrale ausgewertet werden können, wird an Hand von einigen Beispielen in Ziffer 5 gezeigt. In Ziffer 6 wird zuerst die rotationssymmetrische Knickung der Kreisplatte konstanter Biegesteifigkeit streng auf einem neuartigen Weg behandelt und dann ein Iterationsverfahren für Kreisplatten mit stückweis konstanter Biegesteifigkeit mit Hilfe des in Ziffer 3 angegebenen Verfahrens hergeleitet. Ziffer 7 behandelt die dicke Kreisplatte mit rotationssymmetrischer Belastung.

2. Hankeltransformation

Die Hankeltransformation wird auf dem von Weyrich[2]) gezeigten Weg aus der Fouriertransformation hergeleitet und dann erstmalig ihre Anwendung auf zwei einfache Differentialgleichungen gezeigt.

Gegeben sei eine Funktion $f(x, y)$, die im endlichen Gebiet stückweise stetig und zweimal stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Ist die Funktion $f(x, y)$ noch im ganzen Gebiet quadratisch integrierbar, so läßt sie sich durch ein Fourierintegral darstellen.

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\, e^{i[u(s-x)+v(t-y)]}\, ds\, dt\, du\, dv \quad \ldots \quad (2).$$

[1]) O. Pichler: Dissertation. Stuttgart 1927. Berlin 1928.

[2]) R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendung. Leipzig 1937, S. 109.

In (2) führt man an Stelle der cartesischen Koordinaten x, y und s, t die Polarkoordinaten r, φ und ϱ, α ein. In komplexer Schreibweise wird damit

$$(s-x)+i(t-y)=\sqrt{r^2+\varrho^2-2r\varrho\cos(\varphi-\alpha)}\,e^{i\psi},$$

wobei

$$\psi=\varphi-\alpha$$

ist.
Mit

$$u+iv=\lambda e^{i(\beta+\psi)}$$

geht dann das Integral (2) über in

$$F(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\pi}^{+\pi}\lambda\,\varrho F(\varrho,\alpha)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i\lambda\cos\beta\sqrt{r^2+\varrho^2-2r\varrho\cos(\varphi-\alpha)}}\,d\beta\,d\alpha\,d\varrho\,d\lambda \quad . . . (3).$$

Die Integraldarstellung von Hansen

$$J_0\left(\lambda,\sqrt{r^2+\varrho^2-2r\varrho\cos(\varphi-\alpha)}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i\lambda\cos\beta\sqrt{r^2+\varrho^2-2r\varrho\cos(\varphi-\alpha)}}\,d\beta$$

führt (3) über in

$$F(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\pi}^{+\pi}\lambda\,\varrho F(\varrho,\alpha)\,J_0\left(\lambda,\sqrt{r^2+\varrho^2-2r\varrho\cos(\varphi-\alpha)}\right)d\alpha\,d\varrho\,d\lambda \quad . . . . (4).$$

Das Additionstheorem ergibt

$$F(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\lambda\varrho\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}J_n(\lambda,r)\cdot J_n(\lambda,\varrho)\int_{-\pi}^{+\pi}F(\varrho,\alpha)\,e^{in(\varphi-\alpha)}\,d\alpha\,d\varrho\,d\lambda \quad . . . (5).$$

Macht man nun für $F(r,\varphi)$ den speziellen Ansatz

$$F(r,\varphi)=\Phi(r)\,e^{im\varphi}$$

und geht damit in (5) ein, so wird unter Berücksichtigung der Orthogonalität der Kreisfunktionen

$$\Phi(r)=\int_0^\infty J_n(\lambda,r)\,\lambda\int_0^\infty\Phi(\varrho)\cdot\varrho\,J_n(\lambda,\varrho)\,d\varrho\,d\lambda \quad . . . . (6).$$

Schreibt man (6) in Form einer Transformation, so wird

$$\left.\begin{aligned}\bar g(\lambda)&=\int_0^\infty\Phi(\varrho)\cdot\varrho\,J_n(\lambda,\varrho)\,d\varrho,\\ \Phi(r)&=\int_0^\infty\bar g(\lambda)\cdot\lambda\,J_n(\lambda,r)\,d\lambda\end{aligned}\right\} \quad . . . . (7).$$

Es soll nun gezeigt werden, wie die Transformation (7) zur Lösung von Differentialgleichungen herangezogen werden kann.

Vorgegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\mu f=w(r) \quad . . . . (8).$$

Macht man für $f(r)$ die Voraussetzungen

1. $f(r)$ stückweise stetig und stetig differentierbar,
2. $f(r)$ beschränkt,
3. $f(r)=f'(r)=\cdots=f^{(n)}(r)\equiv 0$ für $0\leq r<a$
   und $b<r<\infty$,

so läßt sich $f(r)$ quellenmäßig darstellen. Multipliziert man nun (8) mit $r\cdot J_0(\lambda,r)$ durch und integriert partiell über r, so wird

$$\left.\begin{aligned}(\mu-\lambda^2)\int_0^\infty f(r)\cdot r\,J_0(\lambda,r)\,dr&=\frac{df(a)}{dr}\,a\,J_0(\lambda,a)-\frac{df(b)}{dr}\,b\,J_0(\lambda,b)\\ &+f(a)\,a\,\lambda\,J_1(\lambda,a)-f(b)\,b\,\lambda\,J_1(\lambda,b)+\int_0^a w(\varrho)\cdot\varrho\,J_0(\lambda,\varrho)\,d\varrho\end{aligned}\right\} \quad . . . . (9).$$

Setzt man in (9) zur Abkürzung

$$g(\lambda)=c_1 a J_0(\lambda,a)-d_1 b J_0(\lambda,b)+c_2 a\lambda J_1(\lambda,a)-d_2 b\lambda J_1(\lambda,b)+\int_0^a w(\varrho)\cdot\varrho J_0(\lambda,\varrho)\,d\varrho \quad \ldots (10),$$

so ist durch (7) rein formal die Lösung gegeben

$$f(r)=\int_0^\infty \frac{g(\lambda)}{\mu-\lambda^2}\lambda J_0(\lambda,r)\,d\lambda \quad \ldots (11).$$

In (10) sind zwei Konstanten durch die Randbedingungen bestimmt. Um die noch freien Konstanten zu finden, ist eine zusätzliche Überlegung notwendig.

Die Darstellung (11) ist nur dann möglich, wenn die Funktion $\frac{g(\lambda)}{\mu-\lambda^2}$ beschränkt bleibt. Damit erhält man die Bedingung

$$\lim_{\lambda\to\lambda_K}\frac{g(\lambda)}{\mu-\lambda^2}\leq C \quad \ldots (12).$$

Aus (12) ergeben sich Gleichungen, um die noch freien Konstanten beziehungsweise die Eigenwerte zu bestimmen. Das so erhaltene Ergebnis wird dann noch durch Einsetzen in die Differentialgleichung überprüft. Durch die Wahl des Parameters n der Besselfunktionen lassen sich auch andere Arten von Differentialgleichungen mit Hilfe der Hankeltransformation lösen. Multipliziert man z. B. die Differentialgleichung

$$z''-\frac{z'}{r}=q(r)$$

mit $r\,J_2(\lambda,r)$ durch, so ist die Lösung gegeben mit

$$z(r)=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda^2}\left[\int_a^b q(\varrho)\cdot\varrho\,J_2(\lambda,\varrho)\,d\varrho-b\,c_1\,J_2(\lambda,b)+\lambda\,b\,d_1\,J_1(\lambda,b)\right.$$
$$\left.+\,a\,c_2\,J_2(\lambda,a)-\lambda\,d_2 a\,J_2(\lambda,a)\right]\lambda\,J_0(\lambda\,r)\,d\lambda\,.$$

Im folgenden soll nun die Anwendung dieser neuen Rechenmethode gezeigt werden.

3. Transformation der Differentialgleichung

Wird eine Kreisplatte durch rotationssymmetrische Kräfte normal zu ihrer Oberfläche beansprucht, so genügt ihre Durchbiegung der Differentialgleichung (1). Das in Ziffer 2 angegebene Verfahren führt bei konstanter Biegesteifigkeit N auf die Durchbiegung

$$f(r)=\frac{1}{N}\left[\int_0^\infty g(\lambda)\,\frac{1}{\lambda^3}\,J_0(\lambda\,r)\,d\lambda\right] \quad \ldots (13),$$

wobei

$$g(\lambda)=\int_0^a p(\varrho)\cdot\varrho\,J_0(\lambda,\varrho)\,d\varrho+c_1 a\,J_0(\lambda,a)+c_2\,a\,\lambda J_1(\lambda,a)+c_3 a\,\lambda^2\,J_0(\lambda,a)+c_4\,a\,\lambda^3 J_1(\lambda,a) \quad (14)$$

und a der Radius der Platte ist. Für eine Kreisringplatte mit dem Innenradius a und dem Außenradius b wird

$$\left.\begin{aligned} g(\lambda)=\int_a^b p(\varrho)\cdot\varrho\,J_0(\lambda,\varrho)\,d\varrho+c_1\,b\,J_0(\lambda,b)-d_1 a\,J_0(\lambda,a)+c_2\,\lambda\,b\,J_1(\lambda,b)\\ -d_2\,\lambda\,a\,J_1(\lambda,a)+c_3\lambda^2\,b\,J_0(\lambda,b)-d_3\,\lambda^2\,a\,J_0(\lambda,a)+c_4\,\lambda^3\,b\,J_1(\lambda,b)\end{aligned}\right\} \quad \ldots (15).$$

Aus den Randbedingungen und der Bedingung (12) lassen sich die Konstanten bestimmen.

Wird eine Kreisplatte veränderlicher Biegesteifigkeit durch eine „Stufenplatte" ersetzt, so läßt sich auf diese Platte ebenfalls das beschriebene Verfahren anwenden.

Wie schon Marcus[3]) gezeigt hat, läßt sich die Differentialgleichung (1) aufspalten in die beiden Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\varDelta M(r)=-p(r), \quad (16)$$

$$\varDelta f(r)=-\frac{M(r)}{N}. \quad (17)$$

[3]) H. Marcus: Theorie elastischer Gewebe. Berlin 1924.

In (16) ist

$$M = \frac{m}{m+1}(m_r + m_t)$$

mit

$$m_r = -N\left[\frac{d^2 f}{d r^2} + \frac{1}{r m}\frac{d f}{d r}\right],$$

$$m_t = -N\left[\frac{1}{m}\frac{d^2 f}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d f}{d r}\right].$$

Die Lösungen von (16) und (17) sind gegeben durch

$$M(r) = \int_0^\infty g_1(\lambda)\cdot\lambda\, J_0(\lambda, r)\, d\lambda \quad \ldots \ldots \quad (18),$$

$$f(r) = \int_0^\infty g_2(\lambda)\cdot\lambda\, J_0(\lambda, r)\, d\lambda \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

In (18) und (19) ist

$$g_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\int_0^a p(\varrho)\cdot\varrho\, J_0(\lambda,\varrho)\, d\varrho + c_1 a\, J_0(\lambda, a) + c_2\, a\, \lambda\, J_1(\lambda, a)\right] \quad \ldots \ldots \quad (20),$$

$$g_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\sum^{K}\int_{a_i}^{a_i+1}\frac{M(\varrho)}{Ni}\,\varrho J_0(\lambda,\varrho)\, d\varrho + c_3 a\, J_0(\lambda, a) + c_4\, a\, \lambda\, J_1(\lambda, a)\right] \quad \ldots \quad (21).$$

Für $M(r)$ wurden in (18) dieselben Voraussetzungen gemacht wie für $f(r)$.

4. Unterfunktionen von Belastungen und Deutung der Integrationskonstanten

Wird eine Kreisplatte durch eine konstante Flächenlast von der Größe p_0 kg/cm² innerhalb eines Kreises $r \leq a$ beansprucht, so lautet ihre Unterfunktion mit Bild 1

$$q_1(\lambda) = p_0 \int_0^a r\, J_0(\lambda, r)\, d r = p_0\frac{a}{\lambda} J_1(\lambda, a) \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Aus (22) erhält man durch einen Grenzübergang die Unterfunktion für eine Einzellast im Ursprung

$$q_2(\lambda) = \lim_{a\to 0} p_0 \frac{a}{\lambda} J_1(\lambda, a) = \frac{P}{2\pi} \quad \ldots \ldots \quad (23),$$

wobei

$$P = \lim_{a\to 0} p_0\, a^2 \pi$$

ist.

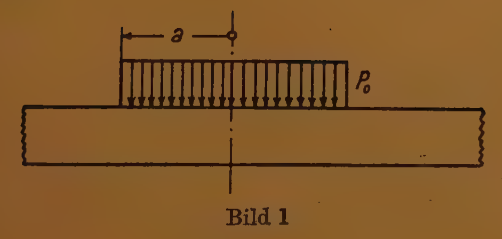


Bild 1

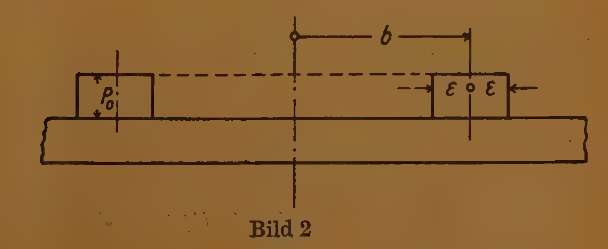


Bild 2

Für eine entlang des Kreises $r = b$ angreifende Linienlast wird mit Bild 2

$$q_3(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[p_0\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} r\cdot J_0(\lambda, r)\, d r\right] = p\cdot b\, J_0(\lambda\, b) \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Die Integrationskonstante c_1 stellt somit die Auflagerkräfte in kg/cm dar.
Für die Kreisringplatte ist die Unterfunktion durch (15) gegeben. Ist die Kreisringplatte am Außenrand frei, so ist in (15)

$$c_1 = 0.$$

Wirkt entlang des Kreises $r = b - \varepsilon$ eine Linienlast von der Größe $-p_1$ und auf dem Kreis $r = b + \varepsilon$ eine Linienlast von der Größe $+p_2$ (Bild 3), so lautet mit (25) hierfür die Unterfunktion.

$$q_4(\lambda) = -p_1 (b-\varepsilon)\, J_0(\lambda, b-\varepsilon) + p_2 (b+\varepsilon)\, J_0(\lambda, b+\varepsilon) \quad \text{(25a)}.$$

Macht man in (25) den Grenzübergang

$$q_5(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} q_4(\lambda)$$

und setzt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p \cdot 2\varepsilon = \overline{m}_r$$

mit

$$|p_1 2\pi (b-\varepsilon)| = |p_2 \cdot 2\pi (b+\varepsilon)| = p \cdot 2\pi ,$$

so lautet die Unterfunktion für ein Ringmoment

$$q_5(\lambda) = \overline{m}_r\, b\, \lambda\, J_1(\lambda, b) \quad \text{(25)}.$$

Die Konstante c_2 stellt somit ein Ringmoment dar, das entlang des Kreises $r = b$ angreift. Ist die Platte am Rand $r = a$ eingespannt, so ist c_2 das Einspannmoment.

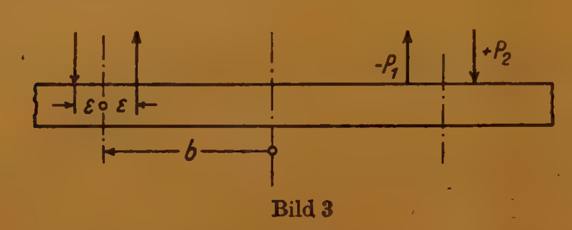


Bild 3

Bild 4

Wird eine Kreisplatte durch Momente dritter Ordnung, die entlang des Kreises $r = b$ angreifen, beansprucht, so lautet hierfür die Unterfunktion

$$q_6 = \overline{M}\, b\, \lambda^2 J_0(\lambda, b) \quad \text{(26)}.$$

Die Momente dritter Ordnung sind in Bild 4 dargestellt. Sie bewirken einen Sprung in der Plattenkrümmung und einen Knick in der Tangente.

Die Konstante c_3 stellt damit ein Moment dritter Ordnung dar. Bei der eingespannten Platte ist $c_3 = 0$.

5. Formeln und Beispiele

An Beispielen soll nun gezeigt werden, daß die in Ziffer 4 auftretenden Integrale streng ausgewertet werden können. Zur Bestimmung der Funktionen $g(\lambda)$ verwendet man am besten eine Tabelle, die die wichtigsten Korrespondenzen enthält. Die Unterfunktion wird mit $g(\lambda)$ und die Originalfunktion mit $f(r)$ bezeichnet. Zur Berechnung der Unterfunktionen wird die Rekursionsformel

$$\int_b^a r^{n+1} J_0(\lambda, r)\, dr = \frac{r^{n+1}}{\lambda} J_1(\lambda, r) \Big|_b^a - \frac{n}{\lambda} \int_b^a r^n J_1(\lambda, r)\, dr$$

herangezogen. Damit läßt sich r^n auf die beiden Integrale

$$\int_b^a r^\nu \lambda^\nu J_{\nu-1}(r, \lambda)\, d(r\lambda) = r^\nu \lambda^\nu J_\nu(r, \lambda) \Big|_b^a ,$$

$$\int_b^a \frac{J_{\nu+1}(r, \lambda)}{(r\lambda)^\nu}\, d(r\lambda) = - \frac{J_\nu(r, \lambda)}{(\lambda r)^\nu} \Big|_b^a$$

zurückführen. Aus der Beziehung

$$\int_0^\infty J_{\mu+1}(a\lambda) J_0(\lambda r) \lambda^{-\mu}\, d\lambda = \left.\begin{matrix} 0 & r > a, \\ \dfrac{(a^2 - r^2)^\mu}{2^\mu a^{\mu+1} \Gamma(\mu+1)} & r \leq a \end{matrix}\right\} \quad (27)$$

erhält man die Unterfunktion für

$$f(r) = (a^2 - r^2)^\mu$$

$$g(\lambda) = 2^\mu a^{\mu+1} \Gamma(\mu+1) \frac{J_{\mu+1}(a, \lambda)}{\lambda^{\mu+1}} .$$

Die Unterfunktionen werden zur Auswertung der Integrale mit der Beziehung

$$\frac{2\nu}{\lambda r} J_\nu(\lambda, r) = J_{\nu-1}(\lambda, r) + J_{\nu+1}(\lambda, r)$$

umgeformt. Wird eine Platte durch Ringlasten bzw. durch eine Einzellast im Koordinatenursprung belastet, so treten in der Unterfunktion Glieder von der Form

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{J_0(\lambda, a) - 1}{\lambda^n} \quad \ldots \quad (28)$$

auf. Durch die Differentation

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{J_0(\lambda, a) - 1}{\lambda} = q(\lambda)$$

läßt sich (28) gewinnen und auf die Integrale (27) sowie auf das Integral

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda, a) - 1}{\lambda} J_0(\lambda, r)\, d\lambda = \begin{cases} 0 & r > a \\ \ln \dfrac{r}{a} & r < a \end{cases} \quad (29)$$

zurückführen.

In Tabelle 1 sind die in den Beispielen verwendeten Unterfunktionen zusammengestellt. Um die Unterfunktionen schnell umformen zu können, sind in Tabelle 2 die hierzu notwendigen Formeln zusammengestellt. Integrale zur Rücktransformation sind dann noch in Tabelle 3 gegeben. (Ziffer 8)

Für den durch Bild 5 gegebenen einfachen Belastungsfall wird

$$g(\lambda) = \frac{2p_0}{\lambda} J_1(2\lambda) + 2c_1 J_0(2\lambda) + 2c_2 \lambda J_1(2\lambda) + 2c_3 \lambda^2 J_0(2\lambda) + 2c_4 \lambda^3 J_1(2\lambda) \quad (30).$$

Die Bedingung (12) führt auf

$$p_0 + c_1 = 0,$$

$$p_0 + 2c_2 + 2c_3 = 0.$$

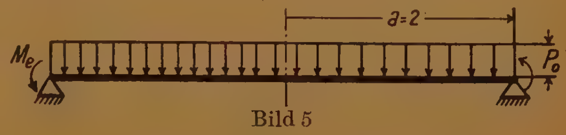


Bild 5

Geht man damit in (30) ein und formt die Unterfunktion um, so wird

$$f(r) = \frac{1}{N}\left[p_0 \int_0^\infty \frac{J_3(2\lambda)\cdot J_0(\lambda, r)}{\lambda^2} d\lambda + 2c_3 \int_0^\infty \frac{J_2(2\lambda)\cdot J_0(\lambda, r)}{\lambda} d\lambda + 2c_4 \int_0^\infty J_1(2\lambda)\cdot J_0(\lambda, r)\, d\lambda\right] \quad (31).$$

Wertet man die Integrale in (31) aus, so ist

$$f(r) = \frac{1}{N}\left[\frac{p_0}{64}(4 - r^2)^2 + \frac{c_3}{4}(4 - r^2) + c_4\right] \quad \ldots \quad (32).$$

Aus den Randbedingungen läßt sich dann c_3 und c_4 bestimmen. Der Vorteil dieser Rechenmethode besteht darin, daß die Lösung die Randbedingungen der Platte noch frei läßt. Ist die Platte auf dem Rand $r = 2$ elastisch eingespannt, so lauten die Randbedingungen hierfür

$$r = 2; \qquad f = 0; \qquad \frac{df}{dr} = \varkappa \cdot m_r(2).$$

Die Federkonstante der Einspannung ist $\varkappa$.

Aus den Randbedingungen folgt sofort $c_4 = 0$. Um c_3 zu berechnen, wird die 2. Randbedingung noch etwas umgeformt. Es ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dr} &= -\varkappa N\left[\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{mr}\frac{df}{dr}\right], \\ \frac{m\cdot r + \alpha}{m\cdot r}\frac{df}{dr} &= -\alpha \frac{d^2f}{dr^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (33),$$

mit

$$\alpha = \varkappa \cdot N.$$

Setzt man in (33) noch $m = 3$, so wird

$$c_3 = \frac{\alpha p_0}{2(3 + 2\alpha)}.$$

Die Durchbiegung der Platte ist damit

$$f(r) = \frac{p_0}{8N}\left[\frac{(4-r^2)^2}{8} + \frac{\alpha}{3+2\alpha}(4-r^2)\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (34).$$

Für den durch Bild 6 gegebenen Belastungsfall lautet mit (24) die Unterfunktion

$$g(\lambda) = 2p\frac{J_0(2\lambda)}{\lambda^4} + \frac{3c_1}{\lambda^4}J_0(3\lambda) + \frac{3c_2}{\lambda^3}J_1(3\lambda) + \frac{3c_3}{\lambda^2}J_0(3\lambda) + \frac{3c_4}{\lambda}J_1(3\lambda) \quad \ldots (35).$$

Die Durchbiegung wird nun mit Hilfe eines Rechenblattes ermittelt (s. Ziffer 8). Aus den beiden ersten Spalten erhält man die Gleichungen

$$2p + 3c_1 = 0,$$

$$-2p - \frac{27}{4}c_1 + \frac{9}{2}c_2 + 3c_3 = 0.$$

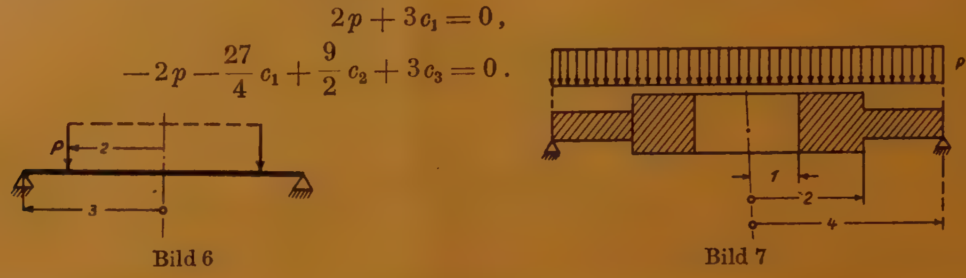


Bild 6 Bild 7

Dann geht man mit den daraus bestimmten c_1 und c_3 wieder in das Rechenblatt ein und erhält für die Durchbiegung

$$\left.\begin{aligned} N\cdot f_1(r) &= 2p(9-r^2) + 2p\ln\frac{r}{3} + \frac{p}{2}r^2\ln\frac{r}{3} + \frac{c_2}{4}(9-r^2) + c_4 && 2 \leq r \leq 3 \\ N\cdot f_2(r) &= 2p(9-r^2) - 2p(4-r^2) + \frac{p}{2}r^2\ln\frac{2}{3} + 2p\ln\frac{2}{3} + \frac{c_2}{4}(9-r^2) + c_4 && 0 \leq r \leq 2 \end{aligned}\right\} (36).$$

Für $r=2$ ist

$$f_1 = f_2; \quad f_1' = f_2'.$$

Für den durch Bild 7 gegebenen Belastungsfall wird die Unterfunktion für das Moment

$$g_1(\lambda) = \frac{8p_0}{\lambda^2}J_2(4\lambda) + \frac{d_1}{\lambda^2}J_0(4\lambda) + \frac{4c_2}{\lambda}J_1(4\lambda) - \frac{d_2}{\lambda}J_1(\lambda) - \frac{d_1}{\lambda^2}J_0(\lambda) \quad \ldots (37).$$

Aus (37) erhält man durch Rücktransformation

$$M(r) = p_0\frac{16-r^2}{4} + d_1\ln\frac{r}{4} + \bar{c}_2 + \bar{d}_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (38).$$

Mit (38) erhält man die Unterfunktion für die Durchbiegung

$$\left.\begin{aligned} g_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\Bigg[&\frac{1}{N_2}\int_1^2\left(\frac{p_0}{4}(16-r^2) + d_1\ln\frac{r}{4} + \bar{c}_2 + \bar{d}_2\right) r\,J_0(\lambda, r)\,dr \\ &+ \frac{1}{N_1}\int_2^4\left(\frac{p_0}{4}(16-r^2) + d_1\ln\frac{r}{4} + \bar{c}_2 + \bar{d}_2\right) r\,J_0(\lambda, r)\,dr \\ &+ 4c_3J_0(4\lambda) + d_3J_0(\lambda)\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (39).$$

In (39) setzt man $\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$ und wertet die Integrale aus. Unter Verwendung der Tabelle 1 ist

$$\left.\begin{aligned} g_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 N_1}\Bigg[&\frac{8p_0}{\lambda^2}J_2(4\lambda) + \frac{d_1}{\lambda^2}J_0(4\lambda) + \frac{4C}{\lambda}J_1(4\lambda) + 4c_3J_0(4\lambda) - \frac{p}{\lambda^2}J_2(2\lambda) \\ &- \frac{3p_0}{\lambda}J_1(2\lambda) - \frac{d_1}{2\lambda^2}J_0(2\lambda) - \frac{d_1}{\lambda}\ln\frac{2}{4}J_1(2\lambda) - \frac{C}{\lambda}J_1(2\lambda) \\ &- \frac{p_0}{4\lambda^2}J_2(\lambda) - \frac{15}{8}\frac{p_0}{\lambda}J_1(\lambda) - \frac{d_1}{2\lambda^2}J_0(\lambda) - \frac{d_1}{2\lambda}\ln\frac{1}{4}J_1(\lambda) \\ &- \frac{C}{2\lambda}J_1(\lambda) - d_3J_0(\lambda)\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (40).$$

Aus (40) erhält man die Durchbiegung, wobei $C=\bar{c}_2+\bar{d}_2$ ist

$$N_1 f_1(r)=\frac{p_0}{64}(16-r^2)^2+[16p-12d_1+8C]\frac{16-r^2}{32}$$
$$+[16p_0-4d_1+8C+4c_3]\ln\frac{r}{4}+\frac{d_1}{8}(16-r^2)-\frac{d_1}{4}r^2\ln\frac{r}{4}, \qquad 2\leq r\leq 4$$

$$N_1 f_2(r)=\frac{p}{64}(16-r^2)^2+[16p-12d_1+8C]\frac{16-r^2}{32}+[16p-4d_1+8C+4c_3]\ln\frac{r}{4}$$
$$+\frac{d_1}{8}(16-r^2)-\frac{d_1}{4}r^2\ln\frac{r}{4}-\frac{p_0}{64}(4-r^2)^2+\left[\frac{7}{2}p_0-2{,}1931\,d_1+C\right]\frac{4-r^2}{8}$$
$$-\left[\frac{7}{2}p_0-1{,}193\,d_1+C\right]\ln\frac{r}{2}-\frac{d_1}{16}(4-r^2)+\frac{d_1}{8}r^2\ln\frac{r}{2}. \qquad 1\leq r\leq 2.$$

Die Rechnung läßt sich ebenfalls mit Hilfe eines Rechenblattes durchführen (s. Ziffer 8). Ist die Platte an ihrem Innenrand $r=1$ frei, so ist $d_1=0$ und die Konstanten lassen sich aus den Randbedingungen

$$r=4;\; f(r)=0;\; m_r=0$$
$$r=1 \qquad m_r=0$$

bestimmen.

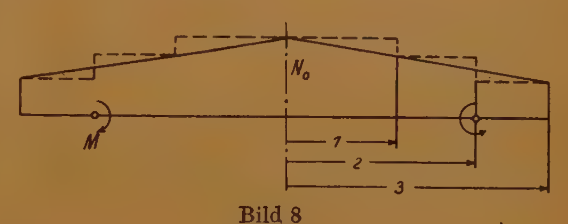


Bild 8

Für das durch Bild 8 gegebene Beispiel sind die Abmessungen durch Tabelle 4 gegeben.

Tabelle 4.

r	0	1	2	3
N	N_0	$N_0\frac{125}{8\cdot 27}$	$N_0\frac{8}{27}$	$N_0\frac{1}{8}$

Setzt man für das entlang des Kreises $r=2$ angreifende Moment

$$M=\alpha+\beta,$$

so wird die Durchbiegung

$$f(r)=\frac{1}{N_0}\left[-0{,}364\,\alpha\frac{1-r^2}{2}-0{,}364\,\alpha\ln r \right. \qquad =0 \text{ für } r>1$$
$$+3{,}456\,\alpha\frac{4-r^2}{8}+0{,}3456\,\alpha\ln\frac{r}{2} \qquad =0 \text{ für } r>2$$
$$-16\beta\frac{4-r^2}{8}-16\beta\ln\frac{r}{2} \qquad =0 \text{ für } r>2$$
$$\left.+36\beta\frac{9-r^2}{18}+16\beta\ln\frac{r}{3}-3{,}092\,\alpha\ln\frac{r}{3}\right].$$

Aus der Randbedingung

$$m_r=0 \quad \text{für} \quad r=3$$

erhält man

$$\beta=\frac{3{,}092\,\alpha}{88}.$$

An der Stelle $r=2$ tritt ein Sprung in der Momentenverteilung auf, aus dem sich α bestimmen läßt

$$\alpha=0{,}96606\,M.$$

Damit ist nun an verschiedenen Beispielen gezeigt, wie die in Ziffer 3 beschriebenen Verfahren anzuwenden sind.

6. Knickung der Kreisplatten

Wird eine Kreisplatte durch rotationssymmetrische Kräfte in der Plattenebene belastet, so läßt sich der Spannungszustand z. B. mit dem Grammelschen Verfahren berechnen. Überschreitet die Belastung einen bestimmten Betrag, so beult die Platte aus. Für eine Platte kon-

stanter Biegesteifigkeit wurden die Beullasten von Meißner[4]) bestimmt. Federhofer[5]) und Gran-Olsson[6]) geben Verfahren, um die Beullasten bei veränderlicher Biegesteifigkeit zu berechnen. Das von Federhofer angegebene Verfahren wurde von Egger[7]) numerisch ausgewertet.

Es soll im folgenden nun gezeigt werden, wie mit Hilfe der Hankeltransformation auf einfache Weise die Beullasten bestimmt werden können. Im Anschluß daran, wird einer Bemerkung Grammels[8]) folgend, ein Iterationsverfahren aufgebaut, das auch auf Kreisplatten mit sprungweis sich ändernder Biegesteifigkeit anwendbar ist.

Wird eine Kreisplatte auf ihrem Außenrand durch die Belastung p kg/cm beansprucht, so wird durch diese Belastung ein homogener Spannungszustand hervorgerufen. Für diesen Belastungsfall lautet die Differentialgleichung für das Ausbeulen[9])

$$\Delta\Delta u = -\mu P \frac{\Delta u}{N} \quad \ldots \ldots \quad (41).$$

Multipliziert man (41) mit $r J_0(\lambda r)$ durch und integriert zwischen den Grenzen $r=0$ und $r=a$ partiell, so geht (41) über in

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^4 \int_0^a u\, r J_0(\lambda r)\, dr + c_1 a J_0(\lambda a) + c_2 a \lambda J_1(\lambda a) + c_3\, a \lambda^2 J_0(\lambda a) + c_4 a \lambda^3 J_1(\lambda a) \\ &= \frac{\mu P}{N}\left[-\lambda^2 \int_0^a u \cdot r J_0(\lambda r)\, dr + d_1\, a J_0(\lambda a) + d_2 a \lambda J_1(\lambda a)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (42).$$

Aus (42) erhält man die Durchbiegung

$$u = \int_0^\infty [\bar{c}_1 a J_0(\lambda a) + \bar{c}_2\, a \lambda J_1(\lambda a) + c_3\, a \lambda^2 J_0(\lambda a) + c_4\, a \lambda^3 J_1(\lambda a)] \times \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\mu P}{N}\right)}\, d\lambda \quad \ldots (43).$$

Da keine Kräfte normal zur Plattenebene auftreten können, so muß in (43)

$$\bar{c}_1 = 0$$

sein.

Ist eine Platte auf dem Rand $r=a$ eingespannt, so ist mit Ziffer 3

$$c_3 = 0 \quad \text{und} \quad c_4 = 0 .$$

Damit geht (43) über in

$$u = \int_0^\infty \frac{\bar{c}_2\, a\, J_1(\lambda a)}{\lambda^2 - \frac{\mu P}{N}} J_0(\lambda r)\, d\lambda \quad \ldots \ldots \quad (44).$$

Mit der Bedingung (12) erhält man aus (44)

$$J_1\left(\sqrt{\frac{\mu P}{N}}\, a\right) = 0,$$

die transzendente Gleichung zur Bestimmung der Beulbelastung.

Für eine frei aufliegende Platte ist

$$c_2 = -\frac{m-1}{a\, m} c_3 \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

Geht man mit (45) in (43) ein, dann wird

$$u = \int_0^\infty \frac{c_3\left[a \lambda J_0(\lambda a) - \frac{m-1}{m} J_1(\lambda a)\right]}{\lambda^2 - \frac{\mu P}{N}} J_0(\lambda r)\, d\lambda \quad \ldots \ldots \quad (46).$$

---

[4]) E. Meissner: Schweiz. Bauztg. 101 (1933), S. 87.
[5]) K. Federhofer: Ing.-Archiv 11 (1940), S. 224; und Sitzgeber. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Kl. Abt. IIa 149 (1940), S. 59.
[6]) R. Gran Olsson: Ing.-Archiv 12 (1941), S. 123.
[7]) H. Egger: Ing.-Archiv 12 (1941), S. 190.
[8]) C. B. Biezeno u. R. Grammel: Techn. Dynamik. Berlin 1939, S. 584.
[9]) Siehe auch Fußnote 8.

Die Bedingung (12) führt auf die transzendente Gleichung

$$a\sqrt{\frac{\mu P}{N}}\,J_0\left(\sqrt{\frac{\mu P}{N}}\,a\right)-\frac{m-1}{m}\,J_1\left(\sqrt{\frac{\mu P}{N}}\,a\right)=0\,.$$

Ist die Platte auf dem Rand elastisch eingespannt, so ist

$$c_2=-\varkappa\frac{m-1}{a\,m}\,c_3\,.$$

Bei der Kreisringplatte kann, da kein homogener Spannungszustand mehr vorliegt, die Gleichung (41) nicht herangezogen werden.
Geht man von der Differentialgleichung[10])

$$\Delta\Delta u=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,s_r\frac{du}{dr}\right)\right] \quad\quad (47)$$

aus, so läßt sich die rechte Seite als Belastung einer Platte denken, sofern $\frac{du}{dr}$ bekannt ist.
Nimmt man nun ein $u_0(r)$ an und setzt

$$\frac{1}{N}\cdot q_0(r)=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\cdot s_r\frac{du_0}{dr}\right)\right] \quad\quad (48),$$

so läßt sich mit dem in Ziffer 3 beschriebenen Verfahren eine Durchbiegung $u_1(r)$ bestimmen. Mit diesem $u_1(r)$ ermittelt man $q_1(r)$ und daraus $u_2(r)$. Das Verfahren wird nun so lange fortgesetzt, bis

$$u_{r+1}(r)\approx\lambda u_n(r)$$

ist. Bei der Iteration setzt man $p=1$. Mit dem so gebildeten u_n berechnet man die Schwarzschen Konstanten

$$a_{i,i+1}=\int_{r_i}^{r_a}u_i\,u_{i+1}\,dr \quad\quad (49).$$

Damit erhält man einen ersten Näherungswert für die Beulbelastung

$$p_{iK}=\frac{a_{ii}}{a_{ii+1}} \quad\quad (50).$$

Für eine Kreisringplatte, die auf dem Außenrand durch p_a und auf dem Innenrand durch p_i belastet ist, wird

$$\sigma_r=-\frac{p_a r_a^2-p_i r_i^2}{r_a^2-r_i^2}+\frac{(p_a-p_i)\,r_a^2 r_i^2}{r^2(r_a^2-r_i^2)} \quad\quad (51).$$

In (51) führt man $\frac{p_i}{p_a}=\delta$ ein und erhält

$$\sigma_r=-p_a\frac{r_a^2-\delta r_i^2}{r_a^2-r_i^2}+p_a\frac{(1-\delta)\,r_a^2 r_i^2}{r^2(r_a^2-r_i^2)} \quad\quad (52).$$

Geht man mit (52) in (48) ein, so ist

$$q_0(r)=-p_a\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\left(r\frac{r_a^2-\delta r_i^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{1}{r}\frac{(1-\delta)\,r_a^2 r_i^2}{(r_a^2-r_i^2)}\right)\frac{du_0}{dr}\right] \quad\quad (53).$$

Zur Durchrechnung eines einfachen Beispiels wird

$$p_i=0;\quad r_a=4;\quad r_i=1$$

gesetzt.
Geht man damit in (53) ein und wählt die Näherungsfunktion

$$u_0=16-r^2,$$

dann erhält man

$$q_0(r)=\frac{64}{15}\,p.$$

Die erste iterierte Durchbiegung wird damit

$$u_1(r)=\frac{64}{15N}\left[\frac{(16-r^2)^2}{64}+\frac{3}{8}(16-r^2)+14\ln\frac{r}{4}-\frac{r^2}{8}\ln\frac{r}{4}+\frac{c_2}{4}(16-r^2)+\alpha\ln\frac{r}{4}\right] \quad (54).$$

[10]) Siehe Fußnote 8 von S. 54.

Bestimmt man aus den Randbedingungen

$$r=1,\quad m_r=0,$$
$$r=4,\quad m_r=0$$

c_2 und α, so wird

$$u_1(r)=\frac{64}{15N}\left[\frac{(16-r^2)^2}{64}+0{,}6603\,(16-r^2)-4{,}2606\ln\frac{r}{4}-\frac{r^2}{8}\ln\frac{r}{4}\right]\quad\ldots\quad(55).$$

Bildet man mit u_0 und u_1 die Schwarzschen Konstanten, so ist

$$\bar{p}=0{,}2242\,N.$$

Aus der bei Biezeno-Grammel[11]) angegebenen Kurve liest man ab

$$p^*=0{,}223\,N.$$

Für den durch Bild 9 gegebenen Belastungsfall, der wohl erstmalig durchgerechnet wird, erhält man

$$S_r=\begin{cases}\dfrac{p_i}{12}\,\dfrac{16-r^2}{r^2} & 2\leq r\leq 4,\\[2mm] \dfrac{p_i}{3}\,\dfrac{7-r^2}{r^2} & 1\leq r\leq 2.\end{cases}$$

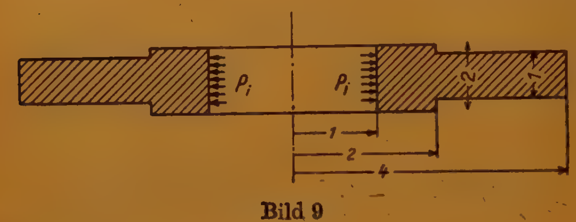


Bild 9

Mit der Ausgangsfunktion

$$u_0=16-r^2\qquad(56)$$

wird

$$\Delta\Delta u_1=\begin{cases}\dfrac{1}{N_1}\,\dfrac{p_i}{3}, & 2\leq r\leq 4\\[2mm] \dfrac{1}{N_2}\,\dfrac{4}{3}\,p_i\,. & 1\leq r<2\ .\end{cases}$$

Aus (56) erhält man

$$u_1=\frac{1}{N_1}\left[\frac{(16-r^2)^2}{192}+\frac{1}{2}(16-r^2)+\frac{32}{3}\ln\frac{r}{4}+\frac{1}{3}r^2\ln\frac{r}{4}+\frac{c_2}{4}(16-r^2)\right.$$
$$\left.+\,\alpha\ln\frac{r}{4}\right],\qquad 2\leq r\leq 4$$

$$\bar{u}_1=\frac{1}{N_1}\left[N_1\,u_1-\frac{(4-r^2)^2}{16\cdot 24}-0{,}34706\,(4-r^2)-2{,}69315\ln\frac{r}{2}-\frac{1}{48}r^2\ln\frac{r}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{7\,c_2}{32}(4-r^2)-\frac{7\,c_2}{4}\ln\frac{r}{2}\right].\qquad 1\leq r<2$$

Mit den Randbedingungen

$$r=1,\quad \frac{du}{dr}=0,$$
$$r=4,\quad m_r=0,$$

berechnet man sich c_2 und α. Der erste Näherungswert für die Beulbelastung wird

$$p_i=2{,}957\,N_1\,.$$

Der Quotient $\frac{u_0}{u_1}$ schwankt zwischen den Grenzen

$$2{,}6<\frac{u_0}{u_1}<3{,}2\,,$$

so daß der erhaltene Näherungswert bei einem weiteren Iterationsschritt sich nur unwesentlich ändern würde.

[11]) Siehe Fußnote 8 von S. 54.

7. Die dicke Platte

Bisher wurde angenommen, daß die Plattendicke klein gegenüber ihren sonstigen Abmessungen war. Diese Einschränkung soll nun aufgegeben werden. Wird eine Platte von der Dicke h durch rotationssymmetrische Kräfte beansprucht, so lassen sich die Spannungen und Dehnungen mit Hilfe der Loveschen Verschiebungsfunktion angeben. Bezeichnet man mit Φ die Lovesche Verschiebungsfunktion, so genügt diese der Differentialgleichung[12])

$$\Delta\Delta\Phi = 0\,, \qquad (57).$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist. Die Verschiebungen und Spannungen sind

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{m}{m-2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}\,,\\
w &= 2\frac{m-1}{m-2}\Delta\Phi - \frac{m}{m-2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\,,\\
\sigma_r &= \frac{2G}{m-2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi - m\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)\\
\sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi - \frac{m}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\\
\sigma_z &= \frac{2(2m-1)}{m-2}G\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi - \frac{m}{2m-1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)\\
\tau &= \frac{2(m-1)}{m-2}G\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\Phi - \frac{m}{m-1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Macht man die Voraussetzung über Φ

$$\lim_{r\to\infty}\Phi = \lim_{r\to\infty}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \lim_{r\to\infty}\frac{\partial^n\Phi}{\partial r^n} = 0\,,$$

so läßt sich auf (57) die Hankeltransformation anwenden. Setzt man

$$\varphi = \int_0^\infty \Phi(rz)\,r\,J_0(\lambda r)\,dr\,,$$

so geht (57) über in

$$\lambda^4 - 2\lambda^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4} = 0 \qquad (59).$$

Die Lösung von (57) ist bekannt und wird in der Form angesetzt

$$\varphi = (A(\lambda) + zB(\lambda))\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z + (C(\lambda) + zD(\lambda))\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z \qquad (60).$$

Mit (60) erhält man die Verschiebungen und Spannungen in der Form

$$\left.\begin{aligned}
w &= \int_0^\infty (2B\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z + 2D\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z)\,\lambda J_0(\lambda r)\,d\lambda\\
&\quad - \frac{m}{m-2}\int_0^\infty [A\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z + Bz\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z + C\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z + Dz\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z]\,\lambda^3 J_0(\lambda r)\,d\lambda\,,\\
\sigma_z &= \frac{2G}{m-2}\int_0^\infty [(m-2)(B\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z + D\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z)\\
&\quad - \lambda m(A\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z + Bz\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z + C\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z + Dz\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z)]\,\lambda^3 J_0(\lambda r)\,d\lambda\,,\\
\tau &= \frac{2G}{m-2}\int_0^\infty [2(B\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z + D\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z)\\
&\quad + m\lambda(A\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z + Bz\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z + C\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z + Dz\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z)]\,\lambda^2 J_1(\lambda r)\,d\lambda
\end{aligned}\right\} \qquad (61).$$

Für den durch Bild 10 gegebenen Belastungsfall lauten die Randbedingungen

$$\sigma_z = 0 \quad \text{für} \quad z = 0\,, \qquad \sigma_z = f(r) \quad \text{für} \quad z = h\,,$$
$$\tau = 0 \quad \text{für} \quad z = 0\,, \qquad \tau = 0 \quad \text{für} \quad z = h\,.$$

[12]) Siehe z. B. C. B. Biezeno u. R. Grammel: Techn. Dynamik. Berlin 1939, S. 35 ff.

Geht man mit diesen Randbedingungen in (61) ein und setzt

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(\varrho) \cdot \varrho \, J_0(\lambda \varrho) \, d\varrho \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62),$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
A &= -\frac{(m-2)^2}{2\,G\,m^2} \, \frac{h \, \mathfrak{Sin}\,\lambda h}{\lambda^2 \, (\mathfrak{Sin}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2)} \, g(\lambda), \\
B &= \frac{m-2}{2\,G\,m} \, \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda h + \lambda h \, \mathfrak{Cos}\,\lambda h}{\lambda^2 \, (\mathfrak{Sin}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2)} \, g(\lambda), \\
C &= -\frac{m-2}{G\,m^2} \, \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda h + \lambda h \, \mathfrak{Cos}\,\lambda h}{\lambda^3 \, (\mathfrak{Sin}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2)} \, g(\lambda), \\
D &= -\frac{m-2}{2\,G\,m} \, \frac{h \, \mathfrak{Sin}\,\lambda h}{\lambda \, (\mathfrak{Sin}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2)} \, g(\lambda)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (63).$$

Die auf diesem Wege berechneten Funktionen stimmen mit den schon bekannten überein[13]).

Geht man mit (63) in die erste Gleichung aus (61) ein, so erhält man, wenn der Integrand mit Ausnahme von $g(\lambda) \cdot \lambda \, J_0(\lambda r)$ in eine Potenzreihe nach λ entwickelt wird, für das erste Glied dieser Reihe

$$w = \frac{1}{N} \int_0^\infty \frac{g(\lambda)}{\lambda^4} \, \lambda \, J_0(\lambda r) \, d\lambda + \cdots \quad \text{für} \quad z = \frac{h}{2},$$

wobei N wieder die Biegesteifigkeit einer „dünnen" Platte ist. In (63) muß damit für $g(\lambda)$ die in Ziffer (3) gefundene Unterfunktion verwendet werden. Berechnet man sich noch weitere Glieder der Reihe, so gibt das zweite Glied den Einfluß der Schubkräfte auf die Durchbiegung.

Damit ist nun ganz allgemein gezeigt, daß die technische Plattenbiegungslehre die erste Annäherung an den genauen Spannungsverlauf gibt.

Der Vollständigkeit wegen[13]) sollen hier auch noch die Spannungen für einen beliebigen Belastungsfall angegeben werden.

Bild 10

Mit den dimensionslosen Veränderlichen erhält man

$$\lambda h = \varkappa, \qquad \frac{z}{h} = \eta, \qquad \frac{r}{h} = \varrho,$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= \frac{1}{h^2} \int_0^\infty \Big\{ [\mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa - \eta\varkappa \, \mathfrak{Cos}\,\eta\varkappa] \, \frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa + \varkappa \, \mathfrak{Cos}\,\varkappa}{\mathfrak{Sin}^2 \varkappa - \varkappa^2} \\
&\qquad + \eta \varkappa^2 \, \mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa \, \frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa}{\mathfrak{Sin}^2 \varkappa - \varkappa^2} \Big\} \varkappa J_0(\varrho\varkappa) \, g(\varkappa) \, d\varkappa, \\
\tau &= -\frac{1}{h^2} \int_0^\infty \Big\{ [\mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa + \eta\varkappa \, \mathfrak{Cos}\,\eta\varkappa] \, \frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa}{\mathfrak{Sin}^2 \varkappa - \varkappa^2} \\
&\qquad - \eta \, \mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa \, \frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa + \varkappa \, \mathfrak{Cos}\,\varkappa}{\mathfrak{Sin}^2 \varkappa - \varkappa^2} \Big\} \varkappa^2 J_1(\varrho\varkappa) \, g(\varkappa) \, d\varkappa, \\
\sigma_r &= \frac{1}{h^2} \int_0^\infty \Big\{ [\mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa + \eta\varkappa \, \mathfrak{Cos}\,\eta\varkappa] \, \frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa + \varkappa \, \mathfrak{Cos}\,\varkappa}{\mathfrak{Sin}^2 \varkappa - \varkappa^2} \\
&\qquad - [2\,\mathfrak{Cos}\,\eta\varkappa + \eta\varkappa \, \mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa] \, \varkappa \, \frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa}{\mathfrak{Sin}^2 \varkappa - \varkappa^2} \Big\} \varkappa J_0(\varrho\varkappa) \, g(\varkappa) \, d\varkappa \\
&\qquad - \frac{1}{\varrho h^2} \, M(\varrho\eta),
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (64).$$

[13]) H. Jung: Ing.-Archiv 18 (1950), S. 178.

$$\sigma_\varphi = \frac{2}{m h^2}\int_0^\infty \left[\mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa+\varkappa\,\mathfrak{Cos}\,\varkappa}{\mathfrak{Sin}^2\varkappa-\varkappa^2}-\varkappa\,\mathfrak{Cos}\,\eta\varkappa\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa}{\mathfrak{Sin}^2\varkappa-\varkappa^2}\right] \times \varkappa J_0(\varrho\varkappa)\cdot g(\varkappa)\,d\varkappa+\frac{1}{\varrho h^2}M(\varrho\eta) \quad . . (64).$$

Dabei ist zur Abkürzung in den Ausdrücken für σ_r und σ_φ gesetzt

$$M(\varrho\eta)=\int_0^\infty \Big\{[(m-2)\,\mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa\,(\mathfrak{Sin}\,\varkappa+\varkappa\,\mathfrak{Cos}\,\varkappa)-2(m-1)\,\mathfrak{Cos}\,\eta\varkappa\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa]\frac{1}{m} + \eta[\varkappa\,\mathfrak{Cos}\,\eta\varkappa\,(\mathfrak{Sin}\,\varkappa+\varkappa\,\mathfrak{Cos}\,\varkappa)-\varkappa^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta\varkappa\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa]\Big\}\times\frac{J_1(\varrho\varkappa)\,g(\varkappa)}{\mathfrak{Sin}^2\varkappa-\varkappa^2}\,d\varkappa\,.$$

8. Anhang

Tabelle 1

$f(r)\equiv 0 \quad r<b$ und $r>a$

$f(r)=\int_0^\infty g(\lambda)\cdot\lambda J_0(\lambda r)$	$g(\lambda)=\int_b^a f(r)\cdot r J_0(\lambda r)\,dr$
$f(r)=c$	$c\left[\frac{a}{\lambda}J_1(\lambda a)-\frac{b}{\lambda}J_1(\lambda b)\right]$
r^2	$\frac{a^3}{\lambda}J_1(\lambda a)-\frac{b^3}{\lambda}J_1(\lambda b)-\frac{2a^2}{\lambda^2}J_2(\lambda a)+\frac{2b^2}{\lambda^2}J_2(\lambda b)$
r^4	$\frac{a^5}{\lambda}J_1(\lambda a)-\frac{4a^4}{\lambda^2}J_2(\lambda a)+\frac{8a^3}{\lambda^3}J_3(\lambda a)-\frac{b^5}{\lambda}J_1(\lambda b)+\frac{4b^4}{\lambda^2}J_2(\lambda b)-\frac{8b^3}{\lambda^3}J_3(\lambda b)$
r^6	$\frac{a^7}{\lambda}J_1(\lambda a)-\frac{6a^6}{\lambda^2}J_2(\lambda a)+\frac{24a^5}{\lambda^3}J_3(\lambda a)-\frac{48a^4}{\lambda^4}J_4(\lambda a)-\frac{b^7}{\lambda}J_1(\lambda b)+\frac{6b^6}{\lambda^2}J_2(\lambda b)$ $-\frac{24b^5}{\lambda^3}J_3(\lambda b)+\frac{48b^4}{\lambda^4}J_4(\lambda b)$
a^2-r^2	$\frac{2a^2}{\lambda^2}J_2(\lambda a)-\frac{2b^2}{\lambda^2}J_2(\lambda b)-b(a^2-b^2)\cdot\frac{1}{\lambda}J_1(\lambda b)$
$(a^2-r^2)^2$	$\frac{8a^3}{\lambda^3}J_3(\lambda a)-\frac{8b^3}{\lambda^3}J_3(\lambda b)-\frac{4b^2}{\lambda^2}(a^2-b^2)J_2(\lambda b)-\frac{b}{\lambda}(a^2-b^2)^2\cdot J_1(\lambda b)$
$(a^2-r^2)^3$	$\frac{48a^4}{\lambda^4}J_4(\lambda a)-\frac{48b^4}{\lambda^4}J_4(\lambda b)-\frac{24b^3}{\lambda^3}\cdot(a^2-b^2)J_3(\lambda b)-\frac{6b^2}{\lambda^2}(a^2-b^2)^2J_2(\lambda b)$ $-\frac{b}{\lambda}(a^2-b^2)^3J_1(\lambda b)$
$r\cdot\ln\frac{r}{a}$	$\frac{1}{\lambda^2}J_0(\lambda a)-\frac{1}{\lambda^2}J_0(\lambda b)-\frac{b}{\lambda}\cdot\ln\frac{b}{a}J_1(\lambda b)$
$r^2\cdot\ln\frac{r}{a}$	$-\frac{a^2}{\lambda^2}J_2(\lambda a)-\frac{2a}{\lambda^3}J_1(\lambda a)+\frac{4}{\lambda^4}J_0(\lambda a)-\frac{b^3}{\lambda}\ln\frac{b}{a}J_1(\lambda b)+\frac{b^2}{\lambda^2}J_2(\lambda b)$ $+\frac{2b^2}{\lambda^2}\ln\frac{b}{a}J_2(\lambda b)+\frac{2b}{\lambda^3}J_1(\lambda b)-\frac{4}{\lambda^4}J_0(\lambda b)$

Tabelle 2

$\frac{1}{\lambda^3}J_1(\lambda a)$	$\frac{a}{2\lambda^2}J_2(\lambda a)+\frac{a}{2\lambda^2}J_0(\lambda a)$
$\frac{1}{\lambda^4}J_2(\lambda a)$	$\frac{a}{4\lambda^3}J_3(\lambda a)+\frac{a^2}{8\lambda^2}J_2(\lambda a)+\frac{a^2}{8\lambda^2}J_0(\lambda a)$
$\frac{1}{\lambda^5}J_3(\lambda a)$	$\frac{a}{6\lambda^4}J_4(\lambda a)+\frac{a^2}{24\lambda^3}J_3(\lambda a)+\frac{a^3}{48\lambda^2}J_2(\lambda a)+\frac{a^3}{48\lambda^2}J_0(\lambda a)$
$\frac{J_0(\lambda a)-1}{\lambda^4}$	$\frac{1}{2\lambda}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left(\frac{J_0(\lambda a)-1}{\lambda}\right)-\frac{3}{4}\frac{a^2}{\lambda^2}J_2(a\lambda)-\frac{a^2}{4\lambda^2}J_0(\lambda a)$

Tabelle 3

$\int\limits_0^\infty J_{\mu+1}(a\lambda)\, J_0(\lambda r)\, \lambda^{-\mu}\, d\lambda$	=	0	für	$r > a$
		$\dfrac{(a^2 - r^2)^\mu}{2^\mu\, a^{\mu+1}\, \Gamma(\mu+1)}$	für	$r \leq a$
$\int\limits_0^\infty \dfrac{J_0(\lambda a) - 1}{\lambda}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda$	=	0	für	$r > a$
		$\ln \dfrac{r}{a}$	für	$r < a$
$\int\limits_0^\infty \dfrac{d^2}{d\lambda^2} \dfrac{J_0(\lambda a) - 1}{\lambda}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda$	=	0	für	$r > a$
		$\dfrac{a^2 - r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2} \ln \dfrac{r}{a}$	für	$r < a$
$\int\limits_0^\infty J_\nu(r\lambda)\, J_{\nu+1}(\lambda a)\, d\lambda$	=	$\dfrac{r^\nu}{b^{\nu+1}}$	für	$0 < r < a$
		$\dfrac{1}{2r}$	für	$0 < r = a$
		0	für	$0 < a < r$

Rechenblatt 1

	$\frac{1}{\lambda^4} g(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda^4}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{J_2(\lambda a)}{\lambda^2}$	$\frac{J_0(\lambda a)}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(\lambda a) - 1}{\lambda}$
I	$\frac{2p}{\lambda^4} J_0(2\lambda)$	$\frac{2p}{\lambda^4}$	$-\frac{2p}{\lambda^2}$	$-\frac{6p}{\lambda^2} J_2(2\lambda)$	$-\frac{2p}{\lambda^2} J_0(2\lambda)$	$\frac{p}{\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(2\lambda) - 1}{\lambda}$
I	$\frac{3c_1}{\lambda^4} J_0(3\lambda)$	$\frac{3c_1}{\lambda^4}$	$-\frac{27}{4} \frac{c_1}{\lambda^2}$			
I	$\frac{3c_2}{\lambda^3} J_1(3\lambda)$		$\frac{9}{2} \frac{c_2}{\lambda_2}$	$\frac{9c_2}{2\lambda^3} J_2(3\lambda)$	$+\frac{9c_2}{2\lambda^2} J_0(3\lambda)$	
I	$\frac{3c_3}{\lambda^2} J_0(3\lambda)$		$3c_3$			
II	$\frac{3c_4}{\lambda} J_1(3\lambda)$	$c_1 = -\frac{2}{3} p$	$3c_0 = -\frac{9}{2} c_2 - \frac{5}{2} p$			
II	$-\frac{2p}{\lambda^4} J_0(3\lambda)$			$\frac{27p}{2\lambda^3} J_2(3\lambda)$	$\frac{9p}{2\lambda^2} J_0(3\lambda)$	$-\frac{p}{\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(3\lambda) - 1}{\lambda}$
II	$-\frac{5p}{2\lambda^2} J_0(3\lambda)$				$-\frac{5}{2} \frac{p}{\lambda^2} J_0(3\lambda)$	
II	$-\frac{9c_p}{2\lambda^2} J_0(3\lambda)$				$-\frac{9}{2} \frac{c_2}{\lambda_2} J_0(3\lambda)$	

$$\frac{1}{\lambda^4}\, g(\lambda) = -\frac{6p}{\lambda^2} J_2(2\lambda) - \frac{2p}{\lambda^2} J_0(2\lambda) + \frac{p}{\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(2\lambda) - 1}{\lambda} + \frac{27p}{2\lambda^2} J_2(3\lambda) + \frac{2p}{\lambda^2} J_0(3\lambda)$$
$$- \frac{p}{\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(3\lambda) - 1}{\lambda} - \frac{9}{2} \frac{c_2}{\lambda^2} J_0(3\lambda) + \frac{3c_4}{\lambda} J_1(3\lambda)$$

$$N f_1(r) = 2p(9 - r^2) + 2p \ln \frac{r}{3} + \frac{p}{2} r^2 \ln \frac{r}{3} + \frac{c_2}{4}(9 - r^2) + c_4 \qquad 2 \leq r \leq 3$$

$$N f_2(r) = 2p(9 - r^2) - 2p(4 - r^2) + \frac{p}{2} r^2 \ln \frac{2}{3} + 2p \ln \frac{2}{3} + \frac{c_2}{4}(9 - r^2) + c_4 \qquad 0 \leq r \leq 2$$

Rechenblatt 2

$g_1(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda^2} J_2(a\lambda)$	$\frac{1}{\lambda^2} J_0(a\lambda)$	$\frac{1}{\lambda} J_1(a\lambda)$
$\frac{4 p_0}{\lambda^3} J_1(4\lambda)$	$\frac{8 p_0}{\lambda^2}$	$\frac{8 p_0}{\lambda^2} J_2(4\lambda)$	$\frac{8 p_0}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$	
$\frac{4 c_1}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$	$\frac{4 c_1}{\lambda^2}$			
$\frac{4 c_2}{\lambda} J_1(4\lambda)$				$\frac{4 c_2}{\lambda} J_1(4\lambda)$
$-\frac{8 p_0}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$			$-\frac{8 p_0}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$	
$+\frac{d_1}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$			$+\frac{d_1}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$	
$-\frac{d_1}{\lambda^2} J_0(\lambda)$	$-\frac{d_1}{\lambda^2}$		$-\frac{d_1}{\lambda^2} J_0(\lambda)$	
$-\frac{d_2}{\lambda^2} J_1(\lambda)$				$-\frac{d_2}{\lambda} J_1(\lambda)$
$g_1(\lambda)$	$\frac{8 p_0}{\lambda^2} J_2(4\lambda) + \frac{d_1}{\lambda^2} J_0(4\lambda) + \frac{4 c_2}{\lambda} J_1(4\lambda) - \frac{d_2}{\lambda} J_1(\lambda) - \frac{d_1}{\lambda^2} J_0(\lambda)$			
$M(r)$	$p_0 \frac{16 - r^2}{4} + d_1 \ln \frac{r}{4} + c_2 + d_2 = p_0 \frac{16 - r^2}{4} + d_1 \ln \frac{r}{4} + \bar{c}_2 + \bar{d}_2$			

$2 \leq r \leq 4$

$g_2(\lambda)$	$\frac{J_3(a\lambda)}{\lambda^3}$	$\frac{J_2(a\lambda)}{\lambda^2}$	$\frac{J_0(a\lambda)}{\lambda^2}$	$\frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(\lambda a) - 1}{\lambda}$
$\frac{8 p_0}{\lambda^4} J_2(4\lambda)$	$\frac{8 p_0}{\lambda^3} J_3(4\lambda)$	$\frac{16 p_0}{\lambda^2} J_2(4\lambda)$	$\frac{16 p_0}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$	
$\frac{d_1}{\lambda^4} J_0(4\lambda)$		$-\frac{12 d_1}{\lambda^2} J_2(4\lambda)$	$-\frac{4 d_1}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$	$+\frac{d_1}{2\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(4\lambda) - 1}{\lambda}$
$\frac{4 C}{\lambda^3} J_1(4\lambda)$		$\frac{8 C}{\lambda^2} J_2(4\lambda)$	$+\frac{8 C}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$	
$\frac{4 c_3}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$			$\frac{4 c_3}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$	
$-\frac{p_0}{\lambda^4} J_2(2\lambda)$	$-\frac{p_0}{2\lambda^3} J_3(2\lambda)$	$-\frac{p_0}{2\lambda^2} J_2(2\lambda)$	$-\frac{p_0}{2\lambda^2} J_0(2\lambda)$	
$-\frac{3 p_0}{\lambda^3} J_1(2\lambda)$		$-\frac{3 p_0}{\lambda^2} J_2(2\lambda)$	$-\frac{3 p_0}{\lambda^2} J_0(2\lambda)$	
$-\frac{d_1}{2\lambda^4} J_0(2\lambda)$		$\frac{3 d_1}{2\lambda^2} J_2(2\lambda)$	$\frac{d_1}{2\lambda^2} J_0(2\lambda)$	$-\frac{d_1}{4\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(2\lambda) - 1}{\lambda}$
$-\frac{d_1}{\lambda^3} K J_1(2\lambda)$		$-\frac{d_1 \ln \frac{2}{4}}{\lambda^2} J_2(2\lambda)$	$-\frac{d_1 \ln \frac{2}{4}}{\lambda^2} J_0(2\lambda)$	
$-\frac{C}{\lambda^3} J_1(2\lambda)$		$-\frac{C}{\lambda^2} J_2(2\lambda)$	$-\frac{C}{\lambda^2} J_0(2\lambda)$	

$$g_1(\lambda) = \frac{8 p_0}{\lambda^3} J_3(4\lambda) + [16 p_0 - 12 d_1 + 8 C] \frac{1}{\lambda^2} J_2(4\lambda) + [16 p_0 - 4 d_1 + 8 C + 4 c_3] \frac{1}{\lambda^2} J_0(4\lambda)$$
$$- \frac{p_0}{2\lambda^3} J_3(2\lambda) - \left[\frac{7}{2} p_0 - 2{,}1931\, d_1 + C\right] \frac{1}{\lambda^2} J_2(2\lambda) - \left[\frac{7}{2} p_0 - 1{,}193\, d_1 + C\right] \frac{1}{\lambda^2} J_0(2\lambda)$$
$$+ \frac{d_1}{2\lambda} \frac{d_2}{d\lambda^2} \frac{J_0(4\lambda) - 1}{\lambda} - \frac{d_1}{4\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{J_0(a\lambda) - 1}{\lambda} + \cdots$$

$$N_1 f_1(r) = \frac{p_0}{64} (16 - r^2)^2 + [16 p_0 - 12 d_1 + 8 C] \frac{16 - r^2}{32} + [16 p_0 - 4 d_1 + 8 C + 4 c_3] \ln \frac{r}{4}$$
$$+ \frac{d_1}{8} (16 - r^2) - \frac{d_1}{4} r^2 \ln \frac{r}{4} \qquad 2 < r \leq 4$$

$$N_1 \bar{f}_1(r) = f_1(r) - \frac{p_0}{64} (4 - r^2)^2 - \left[\frac{7}{2} p_0 - 2{,}1931\, d_1 + C\right] \frac{4 - r^2}{8} - \left[\frac{7}{2} p_0 - 1{,}193\, d_1 + C\right] \ln \frac{r}{2}$$
$$- \frac{d_1}{16} (4 - r^2) + \frac{d_1}{8} r^2 \ln \frac{r}{2} \qquad 1 \leq r < 2$$

Eingegangen am 7. Mai 1951.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 32 Nr. 2/3 Febr./März 1952

Eine Fehlerabschätzung für die Verfahren von Adams und Störmer*)

Von *Johannes Weissinger* in Hamburg

Nach der in [4] *entwickelten Methode werden die von G. Schulz angegebenen Fehlerabschätzungen für das Adamssche Interpolations- und das Störmersche Extrapolationsverfahren verschärft.*

Following the method of [4], *the estimations of the error are improved that were given by G. Schulz for the method of interpolation (Adams) and extrapolation (Störmer).*

Suivant la méthode développée en [4] *les estimations des erreurs, données par G. Schulz, pour la méthode d'interpolation d' Adams et la méthode d' extrapolation de Störmer sont perfectionnées.*

По методу, разработанному в [4], улучшаются данные Г. Шульцем оценки погрешностей для интерполяционного (Адамс) и экстраполяционного (Штёрмер) способов.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [4] wurde gezeigt, wie man die v. Misessche Fehlerabschätzung [1] für das Extrapolationsverfahren von Adams durch einen einfachen Kunstgriff wesentlich verschärfen kann. Dieser Kunstgriff besteht darin, daß man nicht wie bisher die exakten Fehlergleichungen in Differenzenungleichungen verwandelt, indem man (im allgemeinen unter Verlust an Genauigkeit) den Betrag einer Summe durch die Summe der Beträge ersetzt, sondern daß man vorher die stets vorhandenen Relationen zwischen den in den Fehlergleichungen auftretenden Integrationskoeffizienten ausnützt und durch Summation (oder andere lineare Kombination) der Fehlergleichungen neue Gleichungen herleitet, bei denen der Übergang zu den Beträgen keinen so großen Genauigkeitsverlust zur Folge hat. In dieser Formulierung ist der genannte Kunstgriff nicht auf den in [4] behandelten Fall beschränkt, sondern läßt sich allgemein auf die üblichen Differenzenverfahren anwenden. Das soll im folgenden noch für zwei weitere Verfahren durchgeführt werden, für die früher eine weniger scharfe Fehlerabschätzung von G. Schulz ([2], [3]) gegeben wurde: Das Adamssche Interpolationsverfahren zur Lösung der Gleichung $y'=f(x,y)$ und das Störmersche Verfahren zur Lösung von $y''=f(x,y)$. Dabei wird die Kenntnis von [4], insbesondere der dort eingeführten Bezeichnungen, vorausgesetzt.

2. Das Adamssche Interpolationsverfahren

Der Gedankengang verläuft fast wörtlich genau so wie beim Extrapolationsverfahren, so daß wir uns kurz fassen können. Wir benutzen für Integrationskoeffizienten, Quadraturfehler usw. dieselben Buchstaben wie früher, nur mit einem Querstrich versehen.

Die Näherungslösung $\bar{y}$ berechnet sich aus

$$\nabla \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i = h \sum_{\sigma=0}^{r} \bar{a}_\sigma \nabla^\sigma \bar{f}_{i+1} = h \sum_{\varrho=0}^{r} \bar{\alpha}_\varrho \bar{f}_{i+1-\varrho} \quad \text{(2.1)}$$

mit

$$\bar{\alpha}_\varrho = (-1)^\varrho \sum_{\sigma=\varrho}^{r} \binom{\sigma}{\varrho} \bar{a}_\sigma , \qquad \bar{a}_\sigma = \frac{1}{\sigma!} \int_{-1}^{0} u(u+1) \cdots (u+\sigma-1)\, du \quad \text{(2.2)},$$

so daß die Fehlergleichungen lauten

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + h \sum_{\varrho=0}^{r} \alpha_\varrho [\bar{f}_{i+1-\varrho} - f_{i+1-\varrho}] + \bar{q}_i \quad \text{(2.3)}$$

und nach Summation über die Indizes $i, i-1, \ldots, i-l \; (i \geq l+r-1,\; l \geq r)$:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i-l} + h \sum_{\sigma=0}^{r+l} \bar{b}_\sigma [\bar{f}_{i+1-\sigma} - f_{i+1-\sigma}] + \sum_{\sigma=0}^{l} \bar{q}_{i-\sigma} \quad \text{(2.4)}$$

mit

$$\bar{b}_\sigma = \begin{cases} \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_\sigma , & 0 \leq \sigma \leq r-1 \\ 1 , & r \leq \sigma \leq l \\ \bar{\alpha}_{\sigma-l} + \cdots + \bar{\alpha}_r , & l+1 \leq \sigma \leq l+r \end{cases} \quad \text{(2.5)}.$$

Daraus erhält man wie früher eine Fehlerabschätzung der Form

$$|\bar{y}_i - y_i| \leq \varepsilon^* \bar{z}_l^i + \frac{q}{K h \bar{A}^*} \left(\bar{z}_l^i - 1 \right) \quad \text{(2.6)},$$

---

*) Über die Ergebnisse dieser Arbeit wurde auf der Jahrestagung 1950 der GaMM in Darmstadt berichtet.

wobei der Anfangsfehler ε^* durch die Forderung

$$\varepsilon^* \geq |\varepsilon_i|, \qquad i = 0, 1, \ldots, l+r-1 \quad (2.7)$$

definiert ist und z.B. nach G. Schulz [2] berechnet werden kann. Der Quadraturfehler $\bar{q}$ ist

$$\bar{q} = h^{r+2} F_{r+1} \bar{a}_{r+1} \quad (2.8)$$

und die Zahl $\bar{A}^*$ berechnet sich aus

$$\bar{A}^* = 1 + \frac{1}{l+1} \sum_{\sigma=0}^{r-1} (|\bar{b}_\sigma^*| + |\bar{b}_\sigma| - 1), \quad \bar{b}_\sigma^* = \bar{\alpha}_{\sigma+1} + \bar{\alpha}_{\sigma+2} + \cdots + \bar{\alpha}_r \quad (2.9),$$

während $\bar{z}_l$ die positive Wurzel der Gleichung

$$K h = \frac{z^{r-1}(z^{l+1} - 1)}{\sum\limits_{\sigma=0}^{l+r} |\bar{b}_\sigma| \, z^{l+r-\sigma}} = \bar{\varkappa}(z) \quad (2.10)$$

ist. Es wird

$$\left.\frac{d\bar{\varkappa}}{dz}\right|_{z=1} = \frac{1}{\bar{A}^*} \quad (2.11),$$

so daß näherungsweise

$$\bar{z}_l \approx 1 + \bar{A}^* K h \quad (2.12)$$

gesetzt werden darf und der in [4] ausgesprochene Satz auch für das Interpolationsverfahren gültig bleibt. Dagegen haben die Funktionen $\bar{\varkappa}(z)$ genau so wie die entsprechenden Funktionen

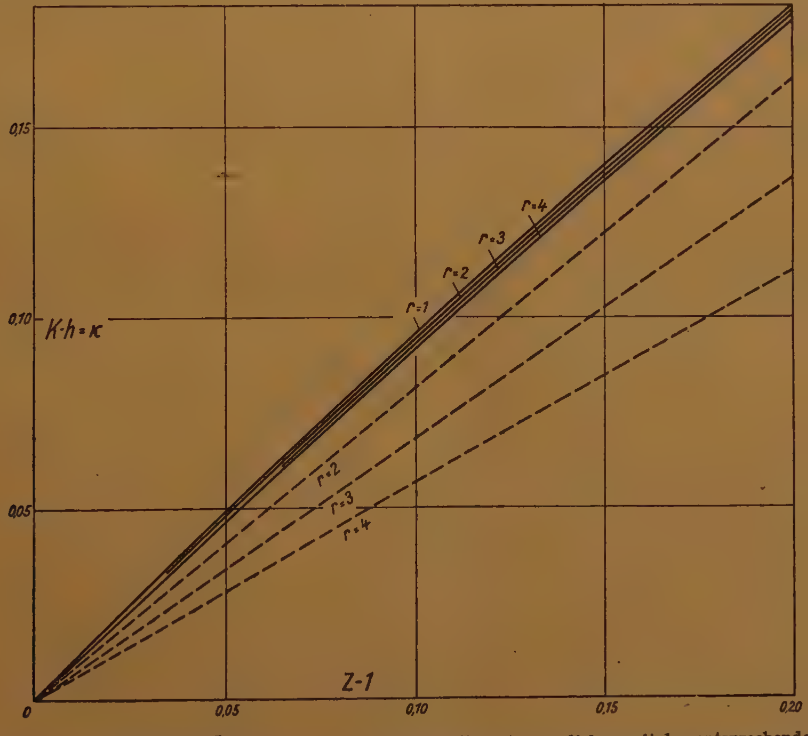


Bild 1. Die Funktionen $\bar{\varkappa}(z)$ (———) nach (2.10) mit $l = 7$, verglichen mit den entsprechenden Funktionen (- - - -) aus [2] für $r = 1, 2, 3, 4$.

von G. Schulz [2] eine negative zweite Ableitung, so daß in (2.12) das Zeichen $\approx$ nicht durch $\leq$ ersetzt werden darf (vgl. Bild 1).

Die Zahlen $\bar{a}$, $\bar{A}^*$ können der folgenden Tabelle entnommen werden, die zum Vergleich auch die entsprechenden Zahlen $\bar{A}$ von G. Schulz enthält:

r	$(l+1)(\bar{A}^* - 1)$	$\bar{A}$ nach [2]	$\lvert\bar{a}_r\rvert$
1	1.0000	1.0000	0.50000
2	1.1667	1.1667	0.08333
3	1.3333	1.4167	0.04167
4	1.5444	1.7861	0.02693
5			0.01875

Ein Vergleich mit der Tabelle aus [4] zeigt, daß die $\bar{A}$ wesentlich schwächer mit r wachsen als die Zahlen A des Extrapolationsverfahrens. Daher ist der Gewinn an Genauigkeit durch die neue Abschätzungsformel für das Interpolationsverfahren längst nicht so groß wie für das Extrapolationsverfahren. Das zeigt auch die Durchführung der Abschätzung für das Beispiel

$$y' = \frac{y-x}{y+x}, \qquad y(0) = 1 .$$

Wir wählen $r=4$, $l=7$ und können für ε^* die bereits in [2] berechnete Schranke für $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_{10}|$:

$$\varepsilon^* = 0{,}673 \cdot 10^{-6}$$

nehmen. Der Tabelle entnimmt man $\bar{A}^*=1{,}193$, also $\bar{z}_l \approx 1+0{,}006\cdot 1{,}193=1{,}00716$, während in [2] $z=1{,}011$ ist. Mit $\bar{z}_l^{100}=2{,}041$ sowie $\bar{q}=1{,}061\cdot 10^{-8}$ bekommt man dann

$$E_{100} = 0{,}673 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}041 + \frac{1{,}061 \cdot 10^{-8}}{0{,}00716} \cdot 1{,}041$$
$$= 1{,}374 \cdot 10^{-6} + 1{,}543 \cdot 10^{-6} = 2{,}92 \cdot 10^{-6},$$

also keinen wesentlichen Gewinn gegenüber der in [2] errechneten Schranke $3{,}47\cdot 10^{-6}$. Bei größeren Schrittzahlen bzw. größeren Werten von Kh wird natürlich die neue Fehlerschranke erheblich mehr unter der alten liegen. — Vergleicht man die neuen Schranken für das Extra- und das Interpolationsverfahren, so ergibt sich ein Verhältnis von $45{,}1:2{,}92 \approx 15:1$, während in [2] für die alten Schranken ein Verhältnis von $574:1$ errechnet wurde; d.h. das Extrapolationsverfahren ist doch nicht so ungenau, wie es nach der alten Abschätzung den Anschein haben konnte.

3. Das Verfahren von Störmer

Die Näherungslösung $\bar{y}$ der Differentialgleichung $y''=f(x,y)$ berechnet sich nach der Formel

$$\nabla^2 \bar{y}_{k+1} = h^2 \sum_{\sigma=0}^{r} a_\sigma \nabla^\sigma \bar{f}_k = h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} \alpha_\varrho \bar{f}_{k-\varrho}, \qquad k=r,\ r+1, \ldots \quad (3.1),$$

mit

$$\alpha_\varrho = (-1)^\varrho \sum_{\sigma=\varrho}^{r} \binom{\sigma}{\varrho} a_\sigma, \qquad a_\sigma = -\frac{\sigma-1}{\sigma!} \int_{-1}^{0} u(u+1)\ldots(u+\sigma-1)\,du \quad (3.2),$$

insbesondere $a_0=1$, $a_1=0$. Die Fehlergleichung lautet dann

$$\nabla^2 \varepsilon_{k+1} = h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} \alpha_\varrho (\bar{f}_{k-\varrho} - f_{k-\varrho}) + q_k, \qquad k=r,\ r+1, \ldots \quad (3.3).$$

Wir addieren nun nicht wie bisher eine feste Anzahl $l+1$ dieser Gleichungen, sondern summieren über $k=i,\ i-1, \ldots, r$:

$$\nabla \varepsilon_{i+1} - \nabla \varepsilon_r = h^2 \sum_{\sigma=0}^{i} b_\sigma (\bar{f}_{i-\sigma} - f_{i-\sigma}) + \sum_{\sigma=0}^{i-r} q_{i-\sigma}, \qquad i=r,\ r+1, \ldots \quad (3.4),$$

wobei auf Grund der leicht zu bestätigenden Relation

$$\sum_{\varrho=0}^{r} \alpha_\varrho = 1 \quad (3.5)$$

gilt

$$b_\sigma = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\sigma, & 0 \le \sigma \le r-1 \\ 1, & r \le \sigma \le i-r \\ \alpha_{\sigma-i+r} + \cdots + \alpha_r, & i-r+1 \le \sigma \le i \end{cases} \qquad (\text{für } i \ge 2r) \quad (3.6).$$

Dabei ist $i \ge 2r-1$ vorausgesetzt. Allgemein kann man schreiben

$$b_\sigma = \sum_{j=0}^{i-r} \alpha_{\sigma-j} \quad \text{mit} \quad \alpha_\varrho = 0 \quad \text{für} \quad \varrho < 0,\ \varrho > r \quad (3.7).$$

b_σ hängt also auch von i ab. Bezeichnet wieder K die Lipschitz-Konstante von $f(x,y)$ und q eine obere Schranke für die einzelnen Quadraturfehler $|q_k|$, so folgt

$$|\varepsilon_{i+1}| \le |\varepsilon_i| + |\varepsilon_r| + |\varepsilon_{r-1}| + Kh^2 \sum_{\sigma=0}^{i} |b_\sigma|\,|\varepsilon_{i-\sigma}| + (i-r+1)q, \quad i=r,\ r+1, \ldots \quad (3.8).$$

Daher liefert jede Lösung der Gleichungen

$$X_{i+1} = X_i + X_r + X_{r-1} + Kh^2 \sum_{\sigma=0}^{i} |b_\sigma| X_{i-\sigma} + (i-r+1)q, \qquad i \geq s \geq r \quad \text{. . . . (3.9)}$$

mit der Anfangsbedingung

$$X_i \geq |\varepsilon_i|, \ i = 0, 1, \ldots, s \quad \text{. . . . . (3.10)}$$

eine Fehlermajorante. Jede Lösung von (3.9) genügt auch den Gleichungen, die entstehen, wenn man je zwei aufeinanderfolgende Gleichungen (3.9) subtrahiert. Wählt man $s = 2r-1$, so lauten diese Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_{i+1} &= 2X_i - X_{i-1} + Kh^2 \{|b_0| X_i + (|b_1| - |b_0|) X_{i-1} + \cdots + (|b_r| - |b_{r-1}|) X_{i-r}\} + q \\ &= 2X_i - X_{i-1} + Kh^2 \{|b_0| (X_i - X_{i-1}) + \cdots + |b_{r-1}| (X_{i-r+1} - X_{i-r}) + |b_r| X_{i-r}\} + q \\ & \qquad i = 2r, \ 2r+1, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3.11).$$

Ist nun $X_i = E_i'$ eine Lösung von (3.9), (3.10) und $X_i = E_i$ eine Lösung von (3.11) mit der Anfangsbedingung

$$E_0 \geq E_0', \qquad E_i - E_{i-1} \geq E_i' - E_{i-1}', \qquad i = 1, 2, \ldots, 2r \quad \text{. . . . . (3.12),}$$

so folgt offenbar

$$E_{i+1} - E_i \geq E_{i+1}' - E_i', \qquad E_i \geq E_i', \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{. . . . . . . (3.13)}$$

d.h. die E_i bilden eine Fehlermajorante.

Setzt man zur Abkürzung

$$\beta_0 = |b_0|, \qquad \beta_i = |b_i| - |b_{i-1}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, r \quad \text{. . . . . (3.14),}$$

und bezeichnet mit z eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$P(z) = z^{r+1} - 2z^r + z^{r-1} - Kh^2 \sum_{\sigma=0}^{r} \beta_\sigma z^{r-\sigma} = 0 \quad \text{. . . . . (3.15)}$$

und mit C eine beliebige Konstante, so ist

$$E_i = Cz^i - \frac{q}{Kh^2} \quad \text{. . . . . (3.16)}$$

eine Lösung von (3.11). Wegen $P(1) = -Kh^2 \sum_{\sigma=0}^{r} \beta_\sigma = -Kh^2 |b_r| = -Kh^2$ und $P(\infty) = \infty$ gibt es wenigstens eine Wurzel $z > 1$. Wir bezeichnen mit z_1 hinfort die kleinste rechts von 1 gelegene Wurzel.

Um die Anfangsbedingung (3.12) zu erfüllen, kann man so vorgehen. Bestimmt man ein ε mit

$$\varepsilon \geq |\varepsilon_i|, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2r-1 \quad \text{. . . . . (3.17)}$$

und setzt

$$E_i' = \varepsilon \ (i = 0, 1, \ldots, 2r-1), \qquad E_{2r}' = \varepsilon \left(3 + Kh^2 \sum_{\sigma=0}^{2r-1} |b_\sigma|\right) + rq \quad \text{. . . . (3.18)}$$

so wird (3.12) befriedigt, wenn man

$$C \geq \varepsilon + \frac{q}{Kh^2}, \qquad C z_1^{2r-1} (z_1 - 1) \geq E_{2r}' - E_{2r-1}' = \varepsilon \left(2 + Kh^2 \sum_{\sigma=0}^{2r-1} |b_\sigma|\right) + rq = \delta \quad (3.19)$$

also

$$C = \operatorname{Max} \left\{\varepsilon + \frac{q}{Kh^2}, \frac{\delta}{z_1^{2r-1} (z_1 - 1)}\right\} \quad \text{. . . . . (3.20)}$$

wählt. Man kann offenbar auch weniger scharf

$$C = \varepsilon + \frac{q}{Kh^2} + \frac{\delta}{z_1 - 1} \quad \text{. . . . . (3.21)}$$

nehmen und damit die Fehlerabschätzung

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon z_1^i + \frac{\delta}{z_1 - 1} z_1^i + \frac{q}{Kh^2} (z_1^i - 1) \quad \text{. . . . . (3.22)}$$

erhalten. Setzt man noch

$$\lambda = h\sqrt{K} \quad \text{. . . . . (3.23),}$$

so ist die Gleichung $P(z)=0$ gleichbedeutend mit

$$\lambda = \sqrt{\frac{z^{r-1}}{\sum_{\sigma=0}^{r} \beta_\sigma z^{r-\sigma}}}\,(z-1) = \lambda(z) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.24).$$

Wegen $\lambda'(1)=1$ gilt also näherungsweise für kleine λ

$$z_1 \approx 1+\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.25)$$

und dies in (3.22) eingesetzt liefert

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon\,(1+h\sqrt{K})^i + \frac{\delta}{h\sqrt{K}}\,(1+h\sqrt{K})^i_i + \frac{q}{K h^2}\,[(1+h\sqrt{K})^i - 1] \quad \ldots \quad (3.26)$$

oder wegen $h=\dfrac{x_i-x_0}{i}$

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon\, e^{\sqrt{K}(x_i-x_0)} + \frac{\delta}{h\sqrt{K}}\, e^{\sqrt{K}(x_i-x_0)} + \frac{q}{K h^2}\left[e^{\sqrt{K}(x_i-x_0)} - 1\right] \quad \ldots \quad (3.27).$$

Diese Ungleichung entspricht der Lösung

$$y(x) = y_0 e^{\sqrt{K}(x-x_0)} + \frac{y_0'}{\sqrt{K}}\, e^{\sqrt{K}(x-x_0)} + \frac{q}{K h^2}\left[e^{\sqrt{K}(x-x_0)} - 1\right] \quad \ldots \quad (3.28)$$

der Differentialungleichung

$$|y''| \leq K|y| + \frac{q}{h^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.29)$$

mit der Anfangsbedingung

$$|y(x_0)| \leq y_0, \qquad |y'(x_0)| \leq y_0' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3.30),$$

wobei ε dem y_0 und $\dfrac{\delta}{h} = \dfrac{E'_{2r}-E'_{2r-1}}{h}$ dem y_0' entspricht. Allerdings sind die Ungleichungen (3.26), (3.27) nicht streng gültig, da man wegen $\lambda''(1)<0$ nicht $z_1 \leq 1+\lambda$ an Stelle von (3.25) schreiben kann.

Die Lösung (3.28) des Problems (3.29), (3.30) ist recht grob. Die optimale Lösung lautet

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y_0'}{\sqrt{K}}\right) e^{\sqrt{K}(x-x_0)} + \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{y_0'}{\sqrt{K}}\right) e^{-\sqrt{K}(x-x_0)} + \frac{q}{2h^2K}\, e^{\sqrt{K}(x-x_0)}$$
$$+ \frac{q}{2h^2K}\, e^{-\sqrt{K}(x-x_0)} - \frac{q}{h^2K} \quad \ldots \quad (3.31).$$

Auch hierzu kann man ein Analogon finden, wenn man beachtet, daß die Gleichung (3.24) wegen der Zweideutigkeit der Wurzel zu gegebenem $\lambda>0$ eine zweite Lösung z_2 besitzt, für die man näherungsweise

$$z_2 \approx 1-\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.32)$$

schreiben kann. Der Ansatz

$$E_i = C_1 z_1^i + C_2 z_2^i - \frac{q}{K h^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.33)$$

liefert dann das gewünschte Analogon. Das soll hier nicht weiter ausgeführt werden, wie überhaupt die Frage nach einer möglichst guten Anpassung an die Anfangsbedingungen nicht erörtert werden soll.

Für $r \leq 5$ stimmen die Koeffizienten β_σ der charakteristischen Gleichung (3.15) bzw. (3.24) mit den α_σ überein, die ja wechselndes Vorzeichen haben. Die in (3.24) definierte Funktion $\lambda(z)$ geht also in die entsprechende Funktion von G. Schulz [3] über, wenn man in (3.24) die β_σ durch $|\beta_\sigma|$ ersetzt, verläuft also oberhalb der Schulzschen Funktion, d.h. die Wurzel z_1 ist stets kleiner als die entsprechende Wurzel in [3]. Das ist auch aus Bild 2 zu entnehmen. Man sieht dort auch, daß $\lambda(z)$ und damit z_1 im praktisch interessierenden λ-Bereich nicht merklich von r abhängen (im Gegensatz zu den Schulzschen Kurven, die mit wachsendem r ungünstiger werden) und daß die Kurve nur wenig von einer Geraden mit der Steigung 1 abweicht, so daß (3.25) in guter Näherung erfüllt ist.

Als „Quadraturfehler" q kann man die in [3] (17) angegebene Zahl c_r nehmen und als „Anfangsfehler" ε die Zahl X_{2r-1}, die sich durch rekursive Lösung der Gleichungen (3.9) ergibt, wobei wie üblich Schranken $X_i \geq |\varepsilon_i|$ für $i=0, 1, \ldots, r$ bekannt sein müssen. Man kann sich ε aber auch aus der expliziten Fehlerformel (30) in [3] verschaffen, nachdem man diese nicht ganz vollständige Formel richtiggestellt hat.

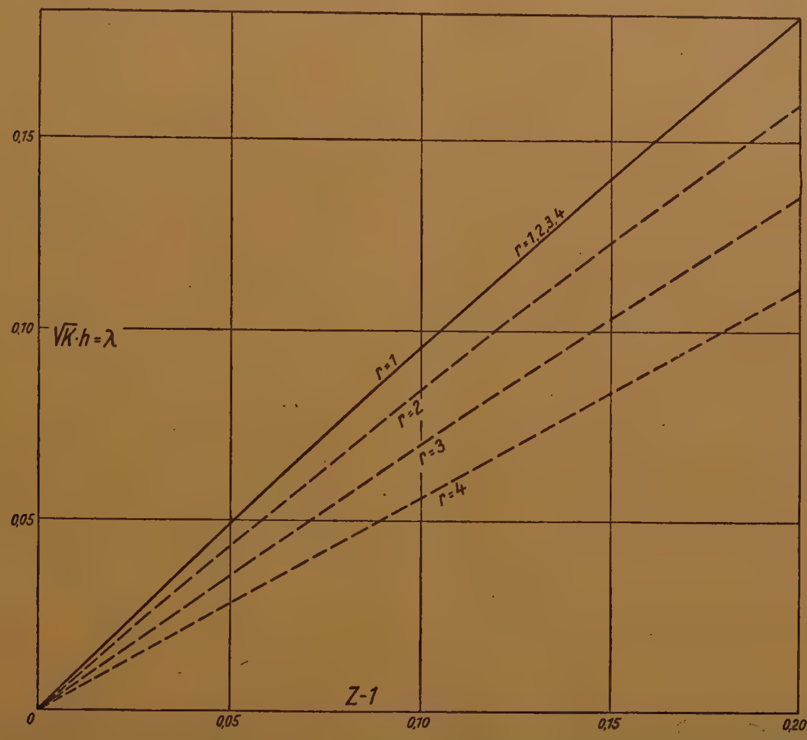


Bild 2. Die Funktionen $\lambda(z)$ (———) nach (3,24), verglichen mit den entsprechenden Funktionen (- - - -) aus [3] für $r = 1, 2, 3, 4$.

Vergleicht man nämlich die Fehlerabschätzung (3.22) mit der ähnlich gebauten Abschätzung (30) in [3], so fällt auf, daß in (30) ein dem Gliede $\frac{\delta}{z_1-1} z_1^i$ entsprechender Term fehlt. Das liegt daran, daß in [3] die Lösung (28) der Differenzengleichung (24) nicht vollständig den Anfangsbedingungen (27) angepaßt ist: Die Bedingung $\delta_{r+1}-\delta_r \geq 0$ ist nicht notwendig erfüllt. Um auch diese Bedingung zu befriedigen, muß man (29) durch

$$C = \text{Max}\left\{X + \frac{c_r}{A_0+A_1+\cdots+A_r} \frac{2X}{z_0^r(z_0-1)}\right\}$$

oder schwächer durch

$$C = X + \frac{c_r}{A_0+A_1+\cdots+A_r} + \frac{2X}{z_0-1}$$

ersetzen und erhält dann statt (30) eine zu (3.22) ganz analoge Ungleichung, wie auch zu erwarten war, da der Gedankengang dieses Paragraphen weitgehend dem in [3] entwickelten nachgebildet ist.

Schrifttum

[1] R. v. Mises: Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 81—92.
[2] G. Schulz: Interpolationsverfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 12 (1932), S. 44—59.
[3] G. Schulz: Fehlerabschätzung für das Störmersche Integrationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 224—234.
[4] J. Weissinger: Eine verschärfte Fehlerabschätzung zum Extrapolationsverfahren von Adams. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 356—363.

Eingegangen am 11. Mai 1951.

Zur Berechnung der Drucktendenz bei Wärmezufuhr innerhalb einer isothermen Atmosphäre von konstanter Grundgeschwindigkeit

Von *H. Stümke* in Denzlingen/Baden

Die vom Verfasser vorgeschlagene Methode der ,,mittleren" Zustandsänderungen zur Berechnung der Wetterentwicklung führt beim vorliegenden Problem auf eine elliptische Differentialgleichung für die lokale Drucktendenz mit drei Parametern (geographische Breite, Temperatur, Grundgeschwindigkeit), die unter der Voraussetzung eines ebenen Erdbodens für den Halbraum mittels Greenscher Funktion gelöst wird. In der Energiebilanz tritt gegenüber dem Fall der anfangs ruhenden Atmosphäre als neues Glied ein meteorologisch wichtiger Ausdruck für die Änderung der kinetischen Energie auf.

The author has proposed a method of ,,mean" changes of state to compute the develpoment of the weather. Applied to the problem mentioned in the title, the method leads to an elliptical differential equation for the local pressure tendency depending on three parameters (latitude, temperature, and fundamental velocity). If the ground is supposed plane, the problem is solved for the half-space by aid of the Green's function. Contrary to the case of the initially resting atmosphere a new term appears in the energy balance that represents the change of the kinetic energy and is of meteorological importance.

L'auteur propose une méthode de changements d'état ,,moyens" pour le calcul du développement du temps. Appliquée au problème actuel, elle conduit à une équation différentielle elliptique pour la tendance de pression locale avec trois paramètres (latitude géographique, température, vitesse fondamentale). Supposé que le terrain est plain, cette équation est résolue pour le demi-espace au moyen de la fonction de Green. Opposé au cas de l'atmosphère reposant d'abord, un terme nouveau représentant le changement de l'énergie kinétique et étant de grande importance météorologique apparaît dans le bilan d'énergie.

Предлагаемый автором метод „средних" изменений состояния для вычисления развития погоды приводит в рассматриваемой проблеме к эллиптическоиу дифференциальному уравнению для местного режима давления с тремя параметрами (географическая широта, температура, основная, скорость), которое решается, предполагая земную поверхность плоской, для полупространства посредством функции Грина. В противоположность к трактованному Прандтлем случаю первоначально спокойной атмосферы, в энергобалансе фигурирует, в качестве нового члена, метеорологически важное выражение для изменения кинетичеюй энергски.

1. Voraussetzungen

In mittleren Breiten der nördlichen Erdhälfte stellt sich vielfach als Teilerscheinung der großen atmosphärischen Zirkulation ein Druckfeld ein, welches von Süden nach Norden abfällt und daher mit einer ausgeprägten West-Ost-Drift verbunden ist. Dieser Grundströmung sind im allgemeinen Störungen überlagert, deren Ursprung, von der orographischen Entstehungsart abgesehen, letzten Endes in horizontalen Temperaturunterschieden zu suchen ist. Es erscheint daher lohnend, in einem möglichst einfachen Schulbeispiel die Zustandsänderungen zu untersuchen, die eine solche strömende Atmosphäre unter dem Einfluß einer Wärmezufuhr erfährt.

Wie im Falle der anfänglich ruhenden Atmosphäre[1]) sollen die beiden extremen Formen der Wärmezufuhr, nämlich einerseits die ,,stetig verteilte" Wärmezufuhr und andererseits die mit turbulenter Luftmassenumlagerung verbundene ,,Konvektion", gleichzeitig nebeneinander behandelt werden. Die stetig verteilte Wärmezufuhr pro Massen- und Zeiteinheit ($= j$) tritt als Störfunktion in der Zustandsgleichung auf[2]). Hingegen macht sich die Konvektion als Massenergiebigkeit pro Massen- und Zeiteinheit ($= \varepsilon$) in der Kontinuitätsgleichung bemerkbar[3]). Wir wollen uns hier auf den Spezialfall beschränken, daß die Wärmezufuhr in einem endlichen Bereich stattfindet, und daß ferner die stetig verteilte Wärmezufuhr am Erdboden verschwindet.

Um das Problem in mathematischer Hinsicht zu vereinfachen, ersetzen wir die Erdoberfläche durch ihre Tangentialebene an einen Punkt im interessierenden Bereich und legen im ungestörten Grundzustand eine isotherme, reibungslose Atmosphäre von einheitlicher Horizontalgeschwindigkeit U zugrunde. Durch die zu U parallele x-Richtung und die dazu senkrechte y-Richtung in der Tangentialebene sowie die z-Richtung zum Zenit sei ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem festgelegt, das sich gegenüber einem Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\lambda}{2} = \omega \sin \varphi$ um die z-Achse dreht (ω=Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, φ=geographische Breite).

Für den Ansatz der Differentialgleichungen soll die Methode der ,,mittleren" Zustandsänderungen[2]) Verwendung finden. Sie besteht darin, daß man die Trägheitskräfte relativ zur

[1]) H. Stümke: Zustandsänderungen durch großräumige Wärmezufuhr im Innern einer anfänglich ruhenden Atmosphäre. Erscheint in der Met. Rundschau.

[2]) H. Stümke: Theorie der Weiterentwicklung von stabilen atmosphärischen Druckfeldern. Met. Rundschau (1950) 241.

[3]) H. Stümke: Rationelle Behandlung der Konvektion bei der angenäherten Berechnung der Wetterentwicklung. Erscheint in der Met. Rundschau.

rotierenden Erde durch geeignete Führungskräfte ersetzt, die den Übergang von einer momentanen Gleichgewichtslage in die nächste bewerkstelligen. Schließlich wird die Voraussetzung kleiner Störungen erlauben, die Gleichungen bezüglich der Größen des Grundzustandes zu linearisieren.

2. Differentialgleichungen, Formulierung der Randwertaufgabe

Unter Beachtung der vorstehenden Annahmen verwenden wir folgende Bezeichnungen:

P, P, T, U = Druck, Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit des Grundzustandes.

$P+p$, $\mathrm{P}+\varrho$, $T+\vartheta$, $U+u$ = entsprechende Größen nach Eintritt der Störung, zu denen noch die Geschwindigkeiten v und w in y- bzw. z-Richtung treten.

Für den ungestörten stationären Gleichgewichtszustand gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &P = P_0\, e^{-\frac{1}{b}\left(z+\frac{\lambda U}{g}y\right)}; \quad \mathrm{P} = \frac{P}{gb}; \quad T = \frac{P}{R\mathrm{P}} = \frac{bg}{R}; \quad R = c_p - c_v, \ \varkappa = \frac{c_p}{c_v} \\ &P_z = -g\mathrm{P}; \qquad P_y = -\lambda U \mathrm{P} \end{aligned}\right\} \quad . . (1).$$

Dabei bedeutet P_0 den konstanten Bodendruck längs der x-Achse und b eine charakteristische Länge für die vertikale Schichtung.

Betrachtet man nun das System kurze Zeit nach Beginn einer kleinen Störung ($t>0$), so erhält man nach Linearisieren die folgenden strengen Gleichungen:

Bewegungsgleichungen:

$$\lambda \mathrm{P} v = p_x + \mathrm{P}(u_t + U u_x) \quad . . . . (2),$$

$$\lambda[\varrho U + \mathrm{P} u] = -p_y - \mathrm{P}(v_t + U v_x) \quad . . . . (3),$$

$$g\varrho = -p_z - \mathrm{P}(w_t + U w_x) \quad . . . . (4).$$

Zustandsgleichung:

$$p_t + U p_x + v P_y + w P_z - \frac{\varkappa P}{\mathrm{P}}[\varrho_t + U\varrho_x + v\mathrm{P}_y + w\mathrm{P}_z] = (\varkappa - 1)\mathrm{P} j \quad . . . (5).$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\varrho_t + U\varrho_x + \mathrm{P} u_x + (\mathrm{P} v)_y + (\mathrm{P} w)_z = \mathrm{P}\varepsilon \quad . . . . (6).$$

Die Störungen sollen nun so langsam erfolgen, daß die Trägheitskräfte relativ klein bleiben, also annähernd geostrophische Verhältnisse herrschen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann in erster Näherung (Index „1"):

$$\lambda \mathrm{P} v_1 = p_{1x} \quad . . . . (2)_1,$$

$$\lambda[\varrho_1 U + \mathrm{P} u_1] = -p_{1y} \quad . . . . (3)_1,$$

$$g\varrho_1 = -p_{1z} \quad . . . . (4)_1.$$

Um zu erreichen, daß diese Gleichungen näherungsweise in jedem Augenblick $t>0$ gelten, fordern wir, daß sie unter entsprechenden Voraussetzungen bezüglich Differenzierbarkeit auch nach zeitlicher Differentiation näherungsweise gültig sind, daß also die Beziehungen bestehen:

$$\lambda \mathrm{P} v_{1t} = p_{1tx} \quad . . . . (2)_{1t},$$

$$\lambda[\varrho_{1t} U + \mathrm{P} u_{1t}] = -p_{1ty} \quad . . . . (3)_{1t},$$

$$g\varrho_{1t} = -p_{1tz} \quad . . . . (4)_{1t}.$$

Setzt man diese Werte als Korrekturen in die bislang vernachlässigten Relativbeschleunigungen der Gl. (2) und (3) ein[2]), so erhält man als zweite Näherungen (Index „2"):

$$\lambda \mathrm{P} v_2 = p_{1x} - \left[\varrho_{1t} U + \frac{p_{1ty}}{\lambda}\right] + \mathrm{P} U u_{1x} \quad . . . . (2)_2,$$

$$\lambda[\varrho_2 U + \mathrm{P} u_2] = -p_{1y} - \frac{p_{1tx}}{\lambda} - \mathrm{P} U v_{1x} \quad . . . . (3)_2.$$

Aus den Gl. $(2)_2$, $(3)_2$, $(4)_{1t}$, (5), (6) findet man beim Grenzübergang $t \to 0$ mit der Festsetzung, daß der Druck mit seinen räumlichen Ableitungen jedenfalls eine stetige Zeitfunktion ist, unter

Fortlassung der Indizes die Gleichungen:

$$\lambda \mathsf{P} v = -U \varrho_t - \frac{p_{t\,y}}{\lambda} \qquad (= \mathsf{P} u_t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

$$\lambda \mathsf{P} u = -\frac{p_{t\,x}}{\lambda} \qquad (= -\mathsf{P} v_t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

$$g \varrho_t = -p_{t\,z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

$$p_t + v P_y + w P_z - \frac{\varkappa P}{\mathsf{P}} [\varrho_t + v \mathsf{P}_y + w \mathsf{P}_z] = (\varkappa - 1) \mathsf{P} j \quad . \quad (10),$$

$$\varrho_t + \mathsf{P} u_x + (\mathsf{P} v)_y + (\mathsf{P} w)_z = \mathsf{P} \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Diese Differentialgleichungen der „mittleren“ Zustandsänderungen bilden den Ausgangspunkt der weiteren Rechnung. Man erkennt, daß sie im allgemeinen ein zusätzliches Geschwindigkeitsfeld u, v, w definieren, welches sich nicht, wie man natürlicherweise erwartet, allmählich aufbaut, sondern unmittelbar nach dem Einsetzen der Störung dem geostrophischen Wind überlagert ist; ein kleiner Nachteil des Verfahrens, den man nach dem Streichen der wirklichen Beschleunigungen in Kauf nehmen muß. Die Größen u, v, w und ϱ_t sind durch den Wert von p_t bereits eindeutig bestimmt. Eliminiert man sie aus diesen Gleichungen, so erhält man nach elementarer Zwischenrechnung für p_t die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{g b}{\lambda^2} [p_{t\,xx} + p_{t\,yy}] + b^2 \left[1 + \frac{(\varkappa - 1)\, U^2}{\varkappa g b}\right] p_{t\,zz} - 2 \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{U b}{\lambda} p_{t\,yz} + b p_{t\,z} \\ = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \left[b \frac{\partial (\mathsf{P} j)}{\partial z} - P \varepsilon\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (12).$$

Wir nehmen jetzt einen ebenen Erdboden an und schreiben demgemäß als Randbedingung das Verschwinden der Vertikalgeschwindigkeit w am Erdboden ($z=0$) vor. Gemäß Voraussetzung beschränken wir uns ferner auf den Spezialfall, daß am Erdboden keine stetige Wärmezufuhr stattfindet; die Größe j verschwindet daher am Boden, und wir erhalten aus Gl. (10) mit Benutzung der Gl. (1) und (7) die Randbedingung

$$\lim_{z \to 0} \left[p_t + p_{t\,z} \varkappa b \left(1 + \frac{(\varkappa - 1)\, U^2}{\varkappa g b}\right) - p_{t\,y} \frac{(\varkappa - 1)\, U}{\lambda}\right] = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

in der bemerkenswerterweise eine Ableitung parallel zur Randfläche ($= p_{t\,y}$) auftritt. Wegen der Unendlichkeit des Lösungsbereiches müssen wir außerdem für das Unendliche des Halbraums Regularitätsbedingungen vorgeben. In Anbetracht der Voraussetzung, daß die Störungen ganz im Endlichen liegen, fordern wir

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty} p_t = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14\text{a})$$

und zwar soll p_t, damit die relative Kleinheit der Störungen sichergestellt ist, stärker als der ungestörte Druck verschwinden, also außerdem

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty} \left[p_t \cdot e^{\frac{1}{b}\left(z + \frac{\lambda U}{g} y\right)}\right] = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14\text{b})$$

gelten. Insgesamt ergibt sich somit die Aufgabe, die inhomogene Diffgl. (12) unter der homogenen Randbedingung (13) sowie unter den Regularitätsbedingungen (14a) und (14b) zu lösen.

3. Transformationen

Abgesehen von den Größen g, ω, R und $\varkappa$, die man als universelle Konstanten des Problems ansehen kann, treten als stärker veränderliche Parameter die geographische Breite φ (in $\lambda = 2\,\omega \sin \varphi$), die Temperatur $T \left(\text{in } b = \frac{R T}{g}\right)$ sowie die Grundgeschwindigkeit U auf. Um diese Parameter möglichst weitgehend zu eliminieren und zugleich den Charakter der Diffgl. (12) festzustellen, führen wir zunächst folgende Transformationen ein:

$$\left.\begin{aligned} X = \frac{x}{l}; \quad Y = \frac{y}{l}; \quad Z = \frac{z}{b \sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{mit} \quad l = \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{g b}{\lambda^2}}; \quad \mu = \sqrt{\varkappa - 1} \frac{U}{\sqrt{\varkappa g b}} \\ p_t (x, y, z) = \Psi (X, Y, Z) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (15).$$

Die Diffgl. (12) nimmt dabei die Form an:

$$\Psi_{XX} + \Psi_{YY} + \Psi_{ZZ} - 2\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\Psi_{YZ} + \frac{\Psi_Z}{\sqrt{1+\mu^2}} = I(X, Y, Z) \quad \ldots \quad (12)'$$

wobei $I(X, Y, Z)$ das inhomogene Glied in den neuen Koordinaten ist. Aus dieser Form ersieht man leicht, daß die Diffgl. stets vom elliptischen Typ ist, da $\left|\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right| < 1$ ist. Die Rand- bzw. Regularitätsbedingungen lauten:

$$\lim_{z\to 0}[\Psi + \Psi_Z \varkappa \sqrt{1+\mu^2} - \Psi_Y \varkappa \mu] = 0 \quad \ldots \quad (13)',$$

$$\lim_{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\to\infty} \Psi = 0 \quad \ldots \quad (14a)',$$

$$\lim_{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\to\infty} \left[\Psi e^{Z\sqrt{1+\mu^2}+\mu Y}\right] = 0 \quad \ldots \quad (14b)'.$$

Als Parameter tritt jetzt nur noch die Grundgeschwindigkeit U im Ausdruck μ auf, der das $\sqrt{\varkappa - 1}$-fache der Machschen Zahl der Grundströmung bedeutet. Das Verhältnis der charakteristischen Längen $l:b$ ist etwa 200 : 1[1]).

Um die gemischte 2. Ableitung sowie die 1. Ableitung im homogenen Teil der Diffgl. (12)' zu beseitigen, verwenden wir weiter die Transformationen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= Y\sqrt{1+\mu^2} + \mu Z, \\ \Psi(X, Y, Z) &= e^{-\frac{1}{2}(Z\sqrt{1+\mu^2}+\mu Y)}\,\Phi(X, \mathfrak{Y}, Z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16).$$

Die Diffgl. für Φ lautet:

$$\Phi_{XX} + \Phi_{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}} + \Phi_{ZZ} - \frac{1}{4}\Phi = Q(X, \mathfrak{Y}, Z) \quad \ldots \quad (12)'',$$

wobei $Q(X, \mathfrak{Y}, Z)$ wieder das inhomogene Glied bedeutet. Die Rand- bzw. Regularitätsbedingungen nehmen die Form an:

$$\lim_{Z\to 0}[\Phi \cdot A + \Phi_Z] = 0 \quad \text{mit} \quad A = \frac{2-\varkappa}{2\varkappa\sqrt{1+\mu^2}} \quad \ldots \quad (13)'',$$

$$\lim_{\sqrt{X^2+\mathfrak{Y}^2+Z^2}\to\infty} \left[\Phi \cdot e^{\frac{-1}{2\sqrt{1+\mu^2}}(Z+\mu\mathfrak{Y})}\right] = 0 \quad \ldots \quad (14a)'',$$

$$\lim_{\sqrt{X^2+\mathfrak{Y}^2+Z^2}\to\infty} \left[\Phi\, e^{\frac{+1}{2\sqrt{1+\mu^2}}(Z+\mu\mathfrak{Y})}\right] = 0 \quad \ldots \quad (14b)''.$$

Der Parameter μ tritt jetzt in der Diffgl. (12)'' überhaupt nicht mehr auf und in der Randbedingung (13)'' nur in der Form $\sqrt{1+\mu^2}$. Nun kann man unter den praktisch vorkommenden meteorologischen Verhältnissen die Machsche Zahl der Grundströmung und damit μ als klein gegen 1 voraussetzen, etwa $Ma < 0{,}2$, $\mu < 0{,}13$. Man kann daher schreiben $\sqrt{1+\mu^2} \approx 1 + \frac{\mu^2}{2}$ und demzufolge $\frac{\mu^2}{2}$ als klein von zweiter Ordnung gegen 1 vernachlässigen. Das Problem geht damit in eine Form über, die für meteorologische Anwendungen in erster Näherung parameterfrei ist. Jedoch wollen wir im folgenden von dieser Vernachlässigung keinen Gebrauch machen, sondern mit den strengen Gleichungen weiterrechnen. Zu beachten ist, daß sich die Randbedingung (13)'' gegenüber den vorangehenden Formen (13) bzw. (13)' insofern vereinfacht hat, als jetzt keine Ableitung parallel zur Randfläche mehr auftritt.

Für die folgenden Betrachtungen ist es sehr instruktiv, die Lage der Ebenen $\mathfrak{Y} = \text{const}$ im physikalischen x, y, z-Raum aufzusuchen. Man findet

$$z = -y\frac{b}{l}\frac{1+\mu^2}{\mu} + \text{const}.$$

Beispielsweise wird mit $\varkappa = 1{,}4$, $\lambda = 10^{-4}$/sec, $b = 8000$ m, $U = 20$ m/s, also $l = 1\,500\,000$ m, $\sqrt{\varkappa g b} = \sqrt{1{,}4 \cdot 10 \cdot 8000} = 335$ m/sec, $Ma = 0{,}06$, $\mu = 0{,}038$ die Steigung

$$\frac{b}{l}\frac{1+\mu^2}{\mu} = \frac{8000}{1\,500\,000 \cdot 0{,}038} \approx 0{,}14;$$

man erhält also Ebenen, die nach negativen y-Werten, d.h. in Richtung zum höheren Bodendruck, mit der Steigung 0,14 flach ansteigen. Für $U=0$ sind sie natürlich vertikal. Die Steigung erreicht theoretisch ein Minimum für $\mu=1$, jedoch hat diese Folgerung keine praktische Bedeutung, da so hohe Grundgeschwindigkeiten nicht vorkommen. Vergleichsweise lautet die Gleichung der Isobarenflächen:

$$z = -\frac{\lambda U}{g}\, y + \text{const} = -y\,\frac{b}{l}\,\mu + \text{const}.$$

Ihre Steigung $\left(=\frac{b}{l}\,\mu\right)$ beträgt bei den obigen Zahlenwerten nur 0,0002; die Isobarenflächen sind also unter normalen Verhältnissen etwa 1000 mal flacher als die Ebenen $\mathfrak{Y} = \text{const}$. Für $\mu=1$ würden sich die Steigungen der beiden Ebenscharen nur um den Faktor 2 unterscheiden und bei höheren Machschen Zahlen sogar asymptotisch zusammenrücken; jedoch haben diese Folgerungen wieder nur noch theoretisches Interesse.

4. Allgemeine Lösung der Randwertaufgabe

a) Bestimmung einer Greenschen Funktion nach zwei verschiedenen Methoden

Für die Lösung der Randwertaufgabe verwenden wir die Methode der Greenschen Funktion. Als solche soll jede Funktion G der 6 Variablen $X, \mathfrak{Y}, Z, \xi, \eta, \zeta$ bezeichnet werden, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. G ist mit Ausnahme einer kleinen Umgebung des Punktes $X=\xi$, $\mathfrak{Y}=\eta$, $Z=\zeta$ im oberen Halbraum $Z\geq 0$, $\zeta>0$ absolut beschränkt und gleichmäßig stetig, hat dort stetige Ableitungen bis zur 2. Ordnung und genügt in bezug auf die Variablen $X, \mathfrak{Y}, Z$ der homogenen Diffgl. (12)″.

2. G wird im Punkte $X=\xi$, $\mathfrak{Y}=\eta$, $Z=\zeta$ wie $1/R(\zeta)$ unendlich;
$$R(\zeta) = \sqrt{(X-\xi)^2 + (\mathfrak{Y}-\eta)^2 + (Z-\zeta)^2}.$$

3. G genügt der Randbedingung (13)″ sowie den Regularitätsbedingungen (14a)″ und (14b)″.

Unter Verwendung der Spiegelungsmethode, also im wesentlichen durch Probieren, findet man eine Greensche Funktion G_1 in der rechentechnisch brauchbaren Form[2])[4]):

$$G_1(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta) = \frac{e^{-\frac{1}{2}R(\zeta)}}{R(\zeta)} + \frac{e^{-\frac{1}{2}R(-\zeta)}}{R(-\zeta)} + 2A e^{-A\zeta}\int_{-\infty}^{-\zeta} e^{-A\zeta_1}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}R(\zeta_1)}}{R(\zeta_1)}\,d\zeta_1 \quad (17).$$

In G_1 tritt außer der Quellösung

$$G_0(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta) = \frac{e^{-\frac{1}{2}R(\zeta)}}{R(\zeta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18),$$

deren Singularität im Integrationsgebiet liegt, und ihrem Spiegelbild $G_0(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, -\zeta)$ noch eine Quellstrecke auf, die auf der Geraden $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ liegt und von $-\infty$ bis $-\zeta$ reicht. Im physikalischen Raum besitzt diese Gerade die Steigung $\frac{b}{l}\,\frac{1+\mu^2}{\mu}$ gegenüber ihrer Projektion auf die Erdoberfläche, wie bereits in Abschnitt 3 gezeigt wurde.

Auf mehr systematischem Wege kann man eine Greensche Funktion G_2 durch Superposition von Exponentiallösungen konstruieren. Man findet so, wenn man zur Quelllösung $G_0(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta)$ eine geeignete additive, für $Z\geq 0$ regulär-analytische Funktion $K(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta)$ bestimmt, als zweite Form einer Greenschen Funktion:

$$G_2(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta) = G_0(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta) + K(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta)$$

mit

$$K(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha, \beta, \zeta)\, e^{i\alpha(X-\xi)+i\beta(\mathfrak{Y}-\eta)+\gamma Z}\,d\alpha\, d\beta$$

wobei

$$\gamma = -\sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2 + \beta^2}$$

$$W(\alpha,\beta,\zeta) = \frac{1}{4\pi^2(A+\gamma)} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha r - i\beta s}\, V(r, s, \zeta)\, dr\, ds$$

und

$$V(r, s, \zeta) = -\lim_{Z\to 0}\,[A G_0(r, s, Z, \zeta) + G_{0Z}] \quad (19)$$

[4]) H. Stümke: Rotationssymmetrische Gleichgewichtsstörungen in einer isothermen Atmosphäre. Z. Geophysik (1940) S. 127.

ist. Da in G_2 ein vierfaches Integral zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ vorkommt, ist diese Form für numerische Rechnungen unbrauchbar.

b) Konstruktion der Lösung

Nach diesen Vorbereitungen erhält man eine Lösung des Randwertproblems, wenn G irgendeine Greensche Funktion ist, durch das Integral

$$\Phi(X, \mathfrak{Y}, Z) = \frac{-1}{4\pi} \iiint\limits_{\zeta \geq 0} G(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta)\, Q(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \quad \ldots \quad (20),$$

wobei die Integration über den oberen Halbraum zu erstrecken ist. Vom inhomogenen Glied $Q(X, \mathfrak{Y}, Z)$ sei dabei vorausgesetzt, daß es nur endlich viele Sprungflächen besitzt, im übrigen aber stetig ist. Φ wird dann mit seinen Ableitungen erster Ordnung überall stetig, also nach Gl. (7), (8), (10) auch die Geschwindigkeiten u, v, w. Die kinematische Grenzflächenbedingung ist damit überall erfüllt.

Bezüglich eines Zahlenbeispiels sei auf den Bericht[1]) verwiesen, dessen Zahlenangaben und Diagramme man unschwer für das hier vorliegende Problem umrechnen kann.

c) Eindeutigkeitsbeweis

Um die Eindeutigkeit der Greenschen Funktion und damit der Lösung der Randwertaufgabe zu zeigen, genügt der Nachweis, daß für $Z \geq 0$ eine Funktion L der 6 Variablen $X, \mathfrak{Y}, Z, \xi, \eta, \zeta$ durch die folgenden Bedingungen eindeutig bestimmt ist:

1. L genügt im oberen Halbraum bezüglich der Variablen $X, \mathfrak{Y}, Z$ der homogenen Diffgl. (12)″.
2. L ist im oberen Halbraum regulär-analytisch.
3. L genügt der Randbedingung

$$\lim_{Z\to 0}[L \cdot A + L_Z)] = -\lim_{Z\to 0}[A \cdot G_0(X-\xi, \mathfrak{Y}-\eta, Z, \zeta) + G_{0Z}] \quad \text{mit} \quad \zeta > 0 \quad \ldots \quad (21)$$

sowie den Regularitätsbedingungen (14a)″ und (14b)″.

Vermöge dieses Satzes ist dann nämlich auch die Greensche Funktion G eindeutig durch die Gleichung

$$G = G_0 + L \quad \ldots \quad (22)$$

bestimmt.

Die Existenz einer Funktion L, die den vorstehenden Bedingungen genügt, geht bereits aus der Angabe ihres Wertverlaufs $G_1 - G_0$ bzw. $G_2 - G_0$ in den Gl. (17) bzw. (19) hervor. Angenommen nun, die Eindeutigkeit von L wäre nicht vorhanden, so müßte es auch eine nicht identisch verschwindende regulär-analytische Funktion M geben, die der homogenen Randbedingung,

$$\lim_{Z\to 0}[M \cdot A + M_Z] = 0 \quad \ldots \quad (23)$$

genügt und im übrigen dieselben Eigenschaften wie L besitzt. Wir bilden aus M und seiner Ableitung nach Z die Funktion

$$N = MA + M_Z \quad \ldots \quad (24).$$

N genügt der Randbedingung

$$\lim_{Z\to 0} N = 0 \quad \ldots \quad (25)$$

und besitzt im übrigen die gleichen Eigenschaften wie M bzw. L; insbesondere folgt aus den beiden Regularitätsbedingungen das Verschwinden von N im Unendlichen. Dies Problem hat aber bekanntlich wegen des negativen Vorzeichens von $\frac{1}{4}\Phi$ in Gl. (12)″ nur die eine Lösung

$$N \equiv 0 \quad \ldots \quad (26)$$

(vgl. Courant-Hilbert II). Folglich muß M allgemein für $Z \geq 0$ der Diffgl.

$$MA + M_Z = 0 \quad \ldots \quad (27)$$

genügen. Die allgemeine Lösung dieser Diffgl. ist

$$M = e^{-AZ} F(X, \mathfrak{Y}, \xi, \eta, \zeta) \quad \ldots \quad (28)$$

wobei F im ganzen oberen Halbraum regulär-analytisch ist und nach unserer Annahme nicht

identisch verschwindet. Für $Z \to \infty$ verschwindet M wie e^{-AZ}, soll aber andererseits gemäß der Regularitätsbedingung (14b)″ stärker als $e^{\frac{-Z}{2\sqrt{1+\mu^2}}}$ verschwinden. Es müßte also

$$A > \frac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} > \frac{1}{2}, \quad \text{d. h. } 1 > \varkappa$$

sein, was den physikalischen Voraussetzungen widerspricht. Folglich muß F und damit M identisch verschwinden, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist.

Aus dem Eindeutigkeitsbeweis ergibt sich die Gleichheit der Funktionen G_1 und G_2, nach Gl. (17) bzw. (19), ein Satz, der auf direktem Wege nur schwer nachzuweisen sein dürfte.

Alle vorstehenden Ausführungen zur Lösung des Randwertproblems lassen sich ohne Schwierigkeit auf das ebene Problem (Ebene senkrecht zur Grundströmung) übertragen. Die Lösung des Problems mit einer inhomogenen Randbedingung (Wärmezufuhr am Boden) liegt ebenfalls vor, jedoch ist die Berechnung eines Zahlenbeispiels analog demjenigen in Bericht[1]) z. Z. noch nicht abgeschlossen, weshalb auf die nur formale Darstellung der Lösung hier verzichtet wurde.

5. Vergleich der vorliegenden Rechnung mit einem Ansatz von L. Prandtl

Es sei an dieser Stelle eine kurze Bemerkung über das sonstige Auftreten einer Differentialgleichung vom Typ der Gl. (12) in der theoretischen Meteorologie gestattet. Die Diffgl. (12) stimmt im Falle $U=0$ und bei unterdrückter x- (oder y-)Komponente formal mit einer von L. Prandtl[5]) abgeleiteten Diffgl. für diejenigen endlichen Druckstörungen überein, die beim Übergang vom ungestörten zu einem gestörten Gleichgewichtszustand auftreten. Die von Prandtl angewandte Betrachtung läßt sich bei Unabhängigkeit aller Größen von der x-Richtung (ebenes Problem) auch für den Fall $U \neq 0$ durchführen. Dabei treten an Stelle der oben angeschriebenen Tendenzen p_t, ϱ_t kleine, aber endliche Störungen des Drucks bzw. der Dichte und an Stelle der Geschwindigkeiten v, w kleine Verschiebungen. Mit diesen Modifikationen erhält man Beziehungen von derselben Form wie die Gl. (7), (9), (10), (11). Lediglich Gl. (8), deren beide Seiten im vorliegenden Falle identisch verschwinden würden, wäre beim Prandtlschen Problem durch die der Gl. $(3)_1$ entsprechende Aussage zu ersetzen, daß auch im gestörten Zustand zwischen der Corioliskraft und dem Druckgradienten stationäres Gleichgewicht besteht. Da diese Gleichung aber beim ebenen Problem für die Ableitung der resultierenden Diffgl. nicht gebraucht wird, erhält man für endliche Druckstörungen ebenfalls eine Beziehung, die formal mit der obigen Gl. (12) für die Drucktendenz übereinstimmt. Der entsprechende Ansatz nach Prandtl führt also auf eine Diffgl., die sich bei der hier verwendeten Methode als Spezialfall ergibt.

6. Energiesätze

Wir wollen zunächst die Zustandsgleichung in Form einer Energiebilanz für die Masseneinheit schreiben. Unter Verwendung der Temperatur als Zustandsgröße an Stelle der Dichte lautet Gl. (5) für $t>0$

$$c_p(\vartheta_t + U\vartheta_x) - \frac{1}{\mathrm{P}}\,[p_t + U p_x + v P_y + w P_z] = j \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)'.$$

Für $t \to 0$ wird daraus

$$c_p \vartheta_t - \frac{1}{\mathrm{P}}\,[p_t + v P_y + w P_z] = j \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)'.$$

Diese Gleichung läßt sich in Verbindung mit den Gl. (1) und (7) in der Form schreiben:

$$j + \frac{p_t}{\mathrm{P}} = c_p \vartheta_t + u_t \cdot U + wg \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

in der man sofort die Aussage erkennt, daß bei jedem individuellen Teilchen die Wärmezufuhr und lokale Druckerhöhung pro Zeiteinheit dazu dienen, seine Enthalpie sowie seine kinetische und potentielle Energie zu erhöhen. Es sei hervorgehoben, daß hier gegenüber dem Fall der anfangs ruhenden Atmosphäre $(U=0)$[1]) als neues Glied der meteorologisch wichtige Ausdruck $u_t \cdot U$ für die Änderung der kinetischen Energie der Masseneinheit auftritt.

Um die Energiebilanz für ein ortsfest vorgegebenes Volumen V mit der Oberfläche F aufzustellen, müssen wir zum Ausdruck bringen, daß in der Zeiteinheit die Änderung der Gesamtenergie innerhalb des Volumens V gleich ist der Energiezufuhr von außen, vermindert um die Energiemengen, welche durch den Massentransport und die dabei geleistete Arbeit gegen

[5]) L. Prandtl: Beiträge zur Mechanik der Atmosphäre (Mémoire présenté à l'Association Météorologique de l' U. G. G. I. Edimbourg — Septembre 1936). Paris 1939.

den äußeren Druck verlorengehen. Die Energiezufuhr von außen ist[1])[3])

$$\iiint\limits_V \left[\mathsf{P} j + \left(z \mathsf{P} g + P \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} + \frac{1}{2} \mathsf{P} U^2\right) \varepsilon\right] dV.$$

Bedeutet ferner S die Gesamtenergie pro Volumeinheit,

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}_1 (U + u) + \mathfrak{i}_2 \cdot v + \mathfrak{i}_3 w \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

den Geschwindigkeitsvektor, so ist $\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V S\,dV$ die Änderung der Gesamtenergie und $\iint\limits_F (S+P)\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}$ die Energie, die durch den Massentransport und die nach außen geleistete Arbeit verlorengeht, wobei die Normale von $d\mathfrak{f}$ nach außen gerichtet sein soll. Insgesamt muß also die Gleichung bestehen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V S\,dV = \iiint\limits_V \left[\mathsf{P} j + \left(z \mathsf{P} g + P \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} + \frac{1}{2} \mathsf{P} U^2\right) \varepsilon\right] dV - \iint\limits_F (S+P)\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} \quad (31)$$

oder in Differentialform:

$$S_t = \mathsf{P} j + \left(z \mathsf{P} g + P \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} + \frac{1}{2} \mathsf{P} U^2\right) \varepsilon - \operatorname{div}[(S+P)\mathfrak{v}] \quad \ldots \ldots \quad (32).$$

Zum Beweis dieser Gleichung beachten wir, daß die Gesamtenergie zur Zeit $t > 0$, wenn man $v^2 + w^2$ gegenüber $(U+u)^2$ gleich streicht,

$$S = z(\mathsf{P} + \varrho) g + (P + p) \frac{1}{\varkappa - 1} + \frac{1}{2} (\mathsf{P} + \varrho)(U + u)^2 \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

und ihre zeitliche Änderung

$$S_t = z \varrho_t g + p_t \frac{1}{\varkappa - 1} + \frac{1}{2} \varrho_t (U + u)^2 + (\mathsf{P} + \varrho)(U + u) u_t \quad \ldots \ldots \quad (33)_t$$

ist. Beim Grenzübergang $t \to 0$ und bei gleichzeitigem Linearisieren wird

$$S = z \mathsf{P} g + P \frac{1}{\varkappa - 1} + \frac{1}{2} \mathsf{P} U^2 \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

und

$$S_t = z \varrho_t g + p_t \frac{1}{\varkappa - 1} + \frac{1}{2} \varrho_t U^2 + \mathsf{P} U u_t \quad \ldots \ldots \quad (35).$$

Durch Einsetzen dieser Gleichungen sowie der Gl. (10) und (11) in Gl. (32) erweist man diese als identisch richtig. Die elementare, aber etwas umständliche Rechnung mag hier übergangen werden. Durch Integration der Gl. (32) über den gesamten oberen Halbraum gewinnt man den Satz, daß die gesamte zugeführte Energie gleich der Summe der Änderungen von innerer, potentieller und kinetischer Energie des Systems ist. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Änderung der kinetischen Energie der Volumeninheit in Gl. (35) einen Bestandteil $\left(= \frac{1}{2} \varrho_t U^2\right)$ enthält, der von der Dichteänderung herrührt, der aber in Gl. (29), wo es sich um die Änderung der kinetischen Energie der Masseneinheit handelt, natürlich nicht auftreten darf.

7. Schlußbemerkung

Die vorstehende Lösung der Randwertaufgabe für die Drucktendenz gibt nur die erste Phase einer neugebildeten Störung wieder. Um die weitere Wetterentwicklung zu studieren, müßte man aus der Drucktendenz durch Multiplikation mit der kleinen Zeit Δt und Addition zum ungestörten Druck P die gestörte Druckverteilung $P + p$ am Ende des Zeitintervalls Δt berechnen, auf Grund dieser Druckverteilung erneut die Drucktendenz aus einem Randwertproblem bestimmen, wieder eine Integration nach der Zeit vornehmen und in dieser Weise fortfahren. Dabei wird man größenordnungsmäßig für die Länge des Zeitintervalls Δt eine Stunde ansetzen können. Auf diese Art konnte in einer früheren Untersuchung[2]) ein einfaches Beispiel vollständig durchgerechnet werden. Beim vorliegenden Problem würde die Rechnung allerdings schon sehr umfangreich werden und im allgemeinen auch nach Aufhören der Wärmezufuhr einen nicht stationären Vorgang ergeben. Lediglich beim zweidimensionalen Problem (Ebene senkrecht zur Grundströmung) wird der atmosphärische Zustand nach Aufhören der Störung stationär.

Eingegangen am 15. Mai 1951.

Einschließungssätze bei Iteration und Relaxation

Von *L. Collatz* in Hannover

Wenn bei Anwendung eines Iterationsverfahrens auf ein Gleichungssystem für n Unbekannte sich bei einem Iterationsschritt alle Unbekannten in demselben Sinne ändern, ergibt sich die Frage, ob bei den weiteren Iterationsschritten die Unbekannten sich stets wieder in demselben Sinne ändern und ob man auf diese Weise von unten und von oben her die Lösung eingabeln kann. Das gilt keineswegs allgemein, aber in weiten, gerade für die Anwendung auf Randwertaufgaben (bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen) wichtigen Klassen von Gleichungssystemen. Auch nichtlineare Systeme werden betrachtet. Besonders herausgegriffen werden die Iterationsverfahren in Gesamt- und in Einzelschritten und die Relaxation.

The author considers the case that a system of equations with n unknowns is solved by iteration, and that, during one step, the correction terms of all unknowns have the same sign. It is asked, if, during further steps, the alteration of the unknowns proceeds steadily in the same sense, and if it is possible, by this way, to include the solution between two limits. That is not generally true but holds for wide classes of systems that are fortunately important for applications to boundary problems (connected with ordinary and partial differential equations). Non-linear systems are considered, too. The methods of total and successive steps and the relaxation method are discussed more intensively.

L'auteur examine le cas qu'un système d'équations avec n inconnus est résolu par itération et que, à un pas, tous les inconnus changent dans le même sens. Il se pose la question, si, aux pas suivants, le changement des inconnus se fait constamment dans le même sens et si de cette manière on peut resserrer la solution entre deux limites. Cela n'est pas la règle générale, mais se fait dans des classes étendues de systèmes d'équations importantes justement pour l'application à des problèmes de valeurs marginales (en connection avec des équations aux dérivées ordinaires et partielles). Aussi les systèmes non-linéaires sont considérés. Les méthodes d'itération en pas totaux et successifs et la relaxation sont traitées spécialement.

Если, при применении итерационного способа к системе уравнений с n неизвестными, все неизвестные изменяются при одном шаге итерации в одном и том же смысле, то возникает вопрос, изменяются ли при дальнейших шагах неизвестные и впредь — постоянно в одном и том же смысле — и можно ли, таким образом, заключить решение между верхним и нижним пределами. Это справедливо отнюдь не во всех случаях, но может быть в широкой мере использовано для классов систем уравнений, важных для применения к краевым задачам (связанным с простыми и с частными дифференциальными уравнениями). Рассматриваются также нелинейные системы. Особое внимание уделяется итерационным способам общих и последовательных шагов, а также методу релаксации.

1. Fragestellung

Es seien für n Unbekannte $x_1, \ldots, x_n$ (lineare oder nichtlineare) Gleichungen

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

vorgelegt; es existiere ein Lösungssystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, und es werde ein Iterationsverfahren benutzt, nach welchem aus einem Näherungssystem $x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}$ ein neues System $x_1^{(\nu+1)}, \ldots, x_n^{(\nu+1)}$ berechnet werde (läßt man hierbei zu, daß bei diesem Übergang sich nur eine Unbekannte x_j geändert hat, so kann man hier auch die verschiedenen Arten von Relaxation einbeziehen, bei denen nicht notwendig die $x_1, \ldots, x_n$ in festem Zyklus periodisch iteriert werden); beim praktischen Rechnen kommt es dann oft vor, daß sich bei einem Schritt alle Unbekannten in gleichem Sinn geändert haben, daß also z.B. alle Änderungen $e_k^{(\nu)}$ nicht negativ sind:

$$e_k^{(\nu)} = x_k^{(\nu+1)} - x_k^{(\nu)} \geq 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Es ergibt sich nun die Frage, ob und wann man folgende Schlüsse ziehen darf:

Aussage A: Aus $e_k^{(\nu)} \geq 0$ für alle k folgt $e_k^{(\nu+1)} \geq 0$, d.h. die Änderungen erfolgen auch weiterhin im gleichen (nichtfallenden) Sinn.

Aussage A': Aus $e_k^{(\nu)} \leq 0$ für alle k folgt $e_k^{(\nu+1)} \leq 0$.

Aussage B: Aus $e_k^{(\nu)} \geq 0$ folgt $\xi_k - x_k^{(\nu+1)} \geq 0$, d.h. die Lösung liegt nicht unterhalb der letzten Näherung.

Aussage B': Aus $e_k^{(\nu)} \leq 0$ folgt $\xi_k - x_k^{(\nu+1)} \leq 0$.

Aussage C (Einschließungsaussage): Hat man zwei Näherungssysteme $x_k^{(\nu)}$, $\tilde{x}_k^{(\nu)}$ mit den dazugehörigen Änderungen $\varepsilon_k^{(\nu)}$ bzw. $\tilde{\varepsilon}_k^{(\nu)} = \tilde{x}_k^{(\nu+1)} - \tilde{x}_k^{(\nu)}$, so folgt aus $\varepsilon_k^{(\nu)} \geq 0$, $\tilde{\varepsilon}_k^{(\nu)} \leq 0$ für $k = 1, \ldots, n$, daß die $x_k^{(\nu)}$ und $\tilde{x}_k^{(\nu)}$ ein Lösungssystem einschließen $x_k^{(\nu)} \leq \xi_k \leq \tilde{x}_k^{(\nu)}$.

Daß diese Aussagen A, B, C keineswegs allgemein gelten, zeigen schon einfachste Beispiele; bei dem Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{r}$$

mit

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 1 & -0,1 \\ 0,2 & -0,1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} 1,7 \\ 1,4 \\ 1,1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

werde etwa ausgegangen vom Vektor

$$\mathfrak{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,3 \\ 0,9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und nach dem Iterationsverfahren in Gesamtschritten (welches in Nr. 5 nochmals erklärt ist)[1]) der iterierte Vektor

$$\mathfrak{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,05 \\ 0,85 \\ 0,93 \end{pmatrix}$$

berechnet. Es sind bei $\mathfrak{x}^{(1)}$ sämtliche Komponenten kleiner als bei $\mathfrak{x}^{(0)}$; trotzdem liegen die zweite und dritte Komponente der Lösung oberhalb der letzten Näherung. Es liegt hier ein Beispiel vor, bei dem das Iterationsverfahren gut konvergiert (die Hauptdiagonalelemente überwiegen stark, das „Zeilensummenkriterium" ist erfüllt), aber die Aussagen A', B', C gelten nicht. Trotzdem gibt es weite, gerade für die Anwendungen wichtige Klassen von Gleichungssystemen, bei denen die Aussagen A—C gelten. Im folgenden sollen einige genannt werden.

Insbesondere ist natürlich die Eingabelungsaussage C von Wichtigkeit wegen der einfachen damit gegebenen Fehlerabschätzung. Man geht einmal von Näherungen aus, die sämtlich zu klein sind und nähert sich so von unten her dem Lösungssystem und ein zweites Mal entsprechend von oben her.

2. Einfache hinreichende Bedingung für die Eingabelungsmöglichkeit

Das Gleichungssystem (1) sei auf irgendeine Weise auf eine für die Iteration geeignete Gestalt

$$x_k = g_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \quad \ldots \ldots (3)$$

gebracht; es lassen sich verschiedene Iterationsverfahren durchführen, z. B. würde man beim Iterationsverfahren in Gesamtschritten Folgen von Näherungen $x_k^{(\nu)}$ nach

$$x_k^{(\nu+1)} = g_k(x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}) \qquad (k = 1, \ldots, n; \ \nu = 0, 1, \ldots) \quad \ldots \ldots (4)$$

und bei der Iteration in Einzelschritten nach

$$x_k^{(\nu+1)} = g_k(x_1^{(\nu+1)}, x_2^{(\nu+1)}, \ldots, x_{k-1}^{(\nu+1)}, x_k^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}) \quad \ldots \ldots (5)$$

berechnen. Bei einer der verschiedenen Arten von Relaxation berechnet man die Abweichungen, die „Defekte":

$$z_k^{(\nu)} = x_k^{(\nu)} - g_k(x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}) \quad \ldots \ldots (6)$$

und verbessert jeweils diejenige Unbekannte x_k, bei welcher der Defekt den größten Betrag hat.

Der Einfachheit halber werde in dieser Nummer das Iterationsverfahren in Gesamtschritten nach (4) zugrundegelegt. Es mögen die gegebenen Funktionen g_k in einem konvexen Bereich $\mathfrak{B}$ des $x_1 \ldots x_n$-Raumes, der ein Lösungssystem und die Näherungen $x_k^{(\nu)}, x_k^{(\nu+1)}, \ldots$ enthält, Lipschitz-Bedingungen genügen: es soll nichtnegative Konstanten K_{kj} geben, so daß für beliebige Wertesysteme $x_j, \bar{x}_j$ aus $\mathfrak{B}$ gilt:

$$|g_k(x_j) - g_k(\bar{x}_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} K_{kj} |x_j - \bar{x}_j| \quad \ldots \ldots (7).$$

Aus (2) und (4) oder

$$e_k^{(\nu+1)} = g_k(x_j^{(\nu+1)}) - g_k(x_j^{(\nu)}) \quad \ldots \ldots (8)$$

folgt dann

$$|e_k^{(\nu+1)}| \leq \sum_{j=1}^{n} K_{kj} |e_j^{(\nu)}| \quad \ldots \ldots (9).$$

[1]) R. v. Mises-H. Pollaczek-Geiringer. Z. angew. Math. Mech. 9 (1929), S. 58—77.

Mit

$$\mathfrak{e}^{(\nu)} = \begin{pmatrix} |e_1^{(\nu)}| \\ \vdots \\ |e_n^{(\nu)}| \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{K} = (K_{kj}) \quad \ldots\ldots\ldots (10),$$

folgt also

$$\mathfrak{e}^{(\nu+1)} \leq \mathfrak{K}\,\mathfrak{e}^{(\nu)}, \qquad \mathfrak{e}^{(\nu+p)} \leq \mathfrak{K}^p\,\mathfrak{e}^{(\nu)} \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

Sind alle charakteristischen Zahlen $\varkappa_{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ (d.h. alle Wurzeln von $\det(\mathfrak{K}-\varkappa\mathfrak{E})=0$ mit $\mathfrak{E}$ als Einheitsmatrix) dem Betrage nach kleiner als 1, so folgt nach Sätzen der Matrizenlehre[2]) die Konvergenz der $x_k^{(\nu)}$ für $\nu \to \infty$, indem man $\sum_{p=\nu}^{\infty} |e_k^{(p)}|$ majorisiert.

Sind überdies alle Ableitungen $\frac{\partial g_k}{\partial x_j} \geq 0$ in $\mathfrak{B}$ für $j, k = 1, \ldots, n$, so folgen die oben genannten Aussagen A—C. Denn mit geeigneten Zwischenstellen $\xi_{kj}^{(\nu)}$ gilt mit (8) nach dem Taylorschen Satz

$$e_k^{(\nu+1)} = \sum_{j=1}^{n} e_j^{(\nu)} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\xi_{kj}^{(\nu)}) \quad \ldots\ldots\ldots (12);$$

also ist dann mit $e_j^{(\nu)} \geq 0$ auch $e_j^{(\nu+1)} \geq 0$; entsprechend ist mit $e_j^{(\nu)} \leq 0$ auch $e_j^{(\nu+1)} \leq 0$. Man hat also dann die Möglichkeit des Eingabelns.

3. Beispiel einer nichtlinearen Randwertaufgabe

Es möge die Randwertaufgabe

$$y'' + e^y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

angenähert mit dem Differenzenverfahren behandelt werden[3]).

Um zunächst einen Überblick zu erhalten, werde mit der Maschenweite $h = \frac{1}{3}$ gerechnet. Für den Funktionswert $y\left(\frac{1}{3}\right) \approx a$ erhält man die Gleichung

$$\frac{a-2a+0}{h^2} + e^a = 0 \text{ mit den Lösungen } a = \begin{cases} 0{,}1260 \\ 3{,}430 \end{cases}.$$

Bei der Maschenweite $h = \frac{1}{4}$ treten zwei Unbekannte a, b auf (Bild 1) mit den Gleichungen

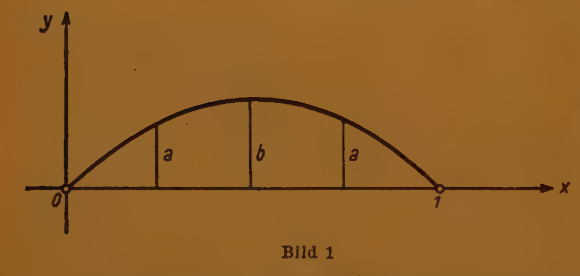


Bild 1

$$\left.\begin{aligned} 16\,(b-2a) + e^a &= 0, \\ 16\,(2a-2b) + e^b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (14).$$

Wir verwenden die Iterationsvorschrift

$$\left.\begin{aligned} a^{(\nu+1)} &= g_1 = \frac{1}{32} e^{a^{(\nu)}} + \frac{1}{2} b^{(\nu)}, \\ b^{(\nu+1)} &= g_2 = a^{(\nu)} + \frac{1}{32} e^{b^{(\nu)}} \end{aligned}\right\} \quad (15).$$

Das Schema auf Seite 79 zeigt die Durchführung der Relaxation; und zwar Zeile Nr. 1—9 für die Lösung mit den kleineren Werten und Zeile 10—15 für die mit den größeren Werten im Auszug. In Zeile Nr. 1 wurde von $a=0{,}1$; $b=0{,}13$ ausgegangen und durch Anbringen von Änderungen versucht, die „Spanne" $|\alpha|+|\beta|$ herabzudrücken. In Zeile Nr. 3 sind beide Änderungen α, β positiv und in Zeile Nr. 4 sind beide negativ. In diesem Falle kann man aussagen, daß die fragliche Lösung von diesen beiden Zeilen eingeschlossen wird. Eine gewisse Schwierigkeit besteht in der Abgrenzung des Bereiches $\mathfrak{B}$, in dem die Lösung liegen muß. Hier kann man z.B. a eliminieren; dann genügt b der Gleichung $f(b) = b - \frac{1}{16} e^b \left(1 + e^{-\frac{1}{32} e^b}\right) = 0$; man sieht sofort $f(0) < 0$, $f(\ln 2) > 0$; es liegt also eine Nullstelle von b zwischen 0 und $\ln 2$ und man diskutiert leicht, daß dieselben Schranken auch für a bestehen, sofern man sich auf die Lösung mit den kleineren Werten festlegt. Wir verwenden also $0 \leq a \leq \ln 2$, $0 \leq b \leq \ln 2$ als Bereich $\mathfrak{B}$.

[2]) Vgl. z. B. L. Collatz: Eigenwertaufgaben. Leipzig 1949, S. 311.

[3]) Die Lösungen der Differentialgleichung sind in geschlossener Form angebbar, doch soll hier absichtlich nicht davon Gebrauch gemacht werden.

Mit $e^a \leq 2$, $e^b \leq 2$ hat man von der dem Betrage nach größten charakteristischen Zahl der Matrix

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{16} \end{pmatrix},$$

d. h. von ihrer Maximalwurzel nachzuweisen, daß sie kleiner als 1 ist. Nach dem Einschließungssatz[4]) genügt es, einen Vektor $\mathfrak{u}$ mit positiven Komponenten anzugeben, so daß die Verhältnisse der Komponenten von $\mathfrak{K}\mathfrak{u}$ zu denen von $\mathfrak{u}$ kleiner als 1 bleiben. Ein solcher ist z. B.

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{K}\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} \frac{35}{64} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix};$$

die Verhältnisse $\frac{35}{48}$ und $\frac{13}{16}$ sind beide kleiner als 1.

Da ferner die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g_k}{\partial a^{(\nu)}}$, $\frac{\partial g_k}{\partial b^{(\nu)}}$ sämtlich positiv sind, gilt nach dem oben Bewiesenen die Einschließungsaussage C, also mit den Zahlen der Zeilen Nr. 3 und 4

$$0{,}102 \leq a \leq 0{,}107, \quad 0{,}135 \leq b \leq 0{,}144\,.$$

Natürlich kann man leicht die Genauigkeit steigern; Zeilen Nr. 5 bis 7 zeigen die Ausführung einer Korrekturrechnung mit den als klein angenommenen Korrekturen δ, ε, welche sich aus

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}035\,\delta + 0{,}5\,\varepsilon - \delta \doteq 0{,}00026 \\ 0{,}036\,\varepsilon + \quad \delta - \varepsilon = -0{,}00002 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

zu

$$\delta = -0{,}000575\,, \quad \varepsilon = -0{,}000574$$

ergeben.

In Zeile 8 und 9 sind Korrekturen so angebracht, daß die Änderungen α, β jeweils beide positiv, bzw. beide negativ sind. Damit hat man die Einschließung[5]).

$$0{,}105446 \leq a \leq 0{,}105450\,, \quad 0{,}141443 \leq b \leq 0{,}141449\,.$$

Bei der anderen Lösung mit den größeren Werten bleiben die charakteristischen Zahlen der zugehörigen Matrix dem Betrage nach nicht unterhalb von 1, und man kann hier leicht Beispiele dafür geben, daß man nicht aus der Tatsache, daß alle Änderungen in einer Richtung erfolgen, schließen darf, die Lösung müsse auch in dieser Richtung liegen. Zeile Nr. 11 ergibt beide Änderungen α, β negativ, trotzdem ist der Wert $b = 3{,}5$ zu klein, entsprechend sind in Zeile Nr. 12 α und β negativ und beide Werte a, b sind zu klein, Zeile Nr. 13 gibt positive α, β, trotzdem

Zeile Nr.	$a^{(\nu)}$	$b^{(\nu)}$	$e^{a^{(\nu)}}$	$e^{b^{(\nu)}}$	$a^{(\nu+1)}$	$b^{(\nu+1)}$	$\alpha = a^{(\nu+1)} - a^{(\nu)}$	$\beta = b^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}$	Spanne $\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert$
1	0,1	0,13	1,1052	1,1388	0,099 54	0,13 559	−0,000 46	0,005 59	0,006 03
2	0,1	0,135	1,1052	1,1445	0,102 04	0,135 77	0,002 04	0,000 77	0,002 81
3	0,102	0,135	1,1074	1,1445	0,102 11	0,137 77	0,000 11	0,002 77	0,002 88
4	0,107	0,144	1,1129	1,1549	0,106 778	0,143 091	−0,000 22	−0,000 91	0,001 13
5	0,106	0,142	1,1118	1,1526	0,105 744	0,142 019	−0,000 26	0,000 02	0,000 28
6	„ $+\delta$	„ $+\varepsilon$	„ $+1{,}11\,\delta$	„ $+1{,}15\,\varepsilon$	„ $+0{,}035\,\delta + 0{,}5\,\varepsilon$	„ $+0{,}036\,\varepsilon + \delta$			
7	0,105 425	0,141 426	1,111 183	1,151 915	0,105 437	0,141 422	0,000 012	−0,000 004	0,000 016
8	0,105 445	0,141 442	1,111 205	1,151 934	0,105 446	0,141 443	0,000 001	0,000 001	0,000 002
9	0,105 451	0,141 450	1,111 212	1,151 943	0,105 450	0,141 449	−0,000 001	−0,000 001	0,000 002
10	3	4	20,09	54,60	2,628	4,71	−0,372	0,71	1,08
11	2,4	3,5	11,02	33,12	2,09	3,44	−0,31	−0,06	0,37
12	2	3	7,39	20,09	1,731	2,63	−0,27	−0,37	0,64
13	2,3	4	9,974	54,60	2,3116	4,006	0,0116	0,006	0,018
14	„ $+\delta$	„ $+\varepsilon$	„ $+9{,}97\,\delta$	„ $+54{,}6\,\varepsilon$	„ $0{,}312\,\delta + 0{,}5\,\varepsilon$	„ $+1{,}71\,\varepsilon + \delta$			
15	2,305	3,984	10,024	53,732	2,305 25	3,984 13	0,000 25	0,000 13	0,000 38

[4]) Vgl. z. B. Math. Z. 48 (1942), S. 221.

[5]) Die Einschließung bezieht sich nur auf die Werte a, b, nicht auf $y\left(\frac{1}{4}\right)$ und $y\left(\frac{1}{2}\right)$.

ist $b=4$ zu groß. Alle drei Zeilen 11 bis 13 geben Gegenbeispiele gegen Aussage B. In Zeile 13 bis 15 ist eine Korrekturrechnung durchgeführt, die mit

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}312\,\delta + 0{,}5\,\varepsilon - \delta = -0{,}0116 \\ 1{,}71\ \ \varepsilon + \ \ \delta - \varepsilon = -0{,}006 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \delta = 0{,}00526 \\ \varepsilon = -0{,}0159 \end{array}$$

die Spanne $|\alpha|+|\beta|$ stark herabdrückt und zeigt, daß diese Korrekturrechnung auch zum Ziele führt, wenn das Iterationsverfahren in der gewöhnlichen Art versagen würde.

4. Spezialfall des linearen Gleichungssystems

Um Aussagen für lineare Gleichungssysteme zu erhalten, könnte man die Ergebnisse vom nichtlinearen Fall spezialisieren. Man bekommt jedoch etwas schärfere Resultate, wenn man die linearen Gleichungssysteme direkt in Angriff nimmt und die bei linearen Gleichungen weiter entwickelte Theorie benutzt. Es sei das Gleichungssystem vorgelegt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ und nichtsingulären Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ lautet die Iterationsvorschrift

$$\mathfrak{B}\mathfrak{x}^{(\nu+1)} + \mathfrak{C}\mathfrak{x}^{(\nu)} = \mathfrak{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18).$$

Die Änderungsvektoren

$$\mathfrak{d}^{(\nu)} = \mathfrak{x}^{(\nu+1)} - \mathfrak{x}^{(\nu)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

genügen dann den Gleichungen

$$\mathfrak{d}^{(\nu)} = \mathfrak{F}\mathfrak{d}^{(\nu-1)} = \ldots = \mathfrak{F}^{\nu}\mathfrak{d}^{(0)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

mit

$$\mathfrak{F} = -\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Die Aussage A ist dann und nur dann bei beliebigem $\mathfrak{d}^{(\nu)}$ richtig, wenn alle Elemente f_{jk} der Matrix $\mathfrak{F}$ nichtnegativ sind, wie aus $\mathfrak{d}^{(\nu+1)} = \mathfrak{F}\mathfrak{d}^{(\nu)}$ unmittelbar folgt. (Wäre ein $f_{pq} < 0$, so wähle man $d_q^{(\nu)} > 0$, $d_\varrho^{(\nu)} = 0$ für $\varrho \neq q$, dann würde $d_p^{(\nu+1)} = f_{pq}\,d_q^{(\nu)} < 0$.)

Das Iterationsverfahren (18) heiße konvergent, wenn es bei beliebiger Wahl des Ausgangsvektors $\mathfrak{x}^{(0)}$ konvergiert. (Dafür ist bei nichtsingulären $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bekanntlich notwendig und hinreichend, daß alle charakteristischen Zahlen von $\mathfrak{F}$ Beträge kleiner als 1 haben.)

Dann gilt für ein konvergentes Iterationsverfahren die Aussage B, sofern $f_{jk} \geq 0$, $\mathfrak{F}$ also nichtnegativ ist; es ist nämlich

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{(\nu+1)} = \sum_{\varrho=\nu+1}^{\infty} \mathfrak{d}^{(\varrho)} = \mathfrak{G}\mathfrak{d}^{(\nu+1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

mit

$$\mathfrak{G} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \mathfrak{F}^{\varrho}.$$

Da die charakteristischen Zahlen von $\mathfrak{F}$ Beträge kleiner als 1 haben, konvergiert die Matrizenreihe, welche $\mathfrak{G}$ definiert, und wegen $f_{jk} \geq 0$ hat auch $\mathfrak{G}$ nur nichtnegative Elemente. Hat also $\mathfrak{d}^{(\nu+1)}$ nur nichtnegative (nichtpositive) Elemente, so auch $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{(\nu+1)}$, womit auch hier die Möglichkeit des Eingabelns gegeben ist.

5. Eingabelung bei den Iterationsverfahren in Gesamt- und Einzelschritten

Ein wichtiger Spezialfall ist der einer Matrix $\mathfrak{A}$ mit positiven Hauptdiagonalelementen $a_{jj} > 0$ und nichtpositiven Elementen außerhalb der Hauptdiagonale $a_{jk} \leq 0$ für $j \neq k$. Beim Iterationsverfahren in Gesamtschritten verwendet man als $\mathfrak{B}$ eine Diagonalmatrix mit den a_{jj}:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

und $\mathfrak{F} = -\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C}$ offenbar nichtnegativ.

Das gleiche gilt beim Iterationsverfahren in Einzelschritten. Hier verwendet man

$$\mathfrak{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{C}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat $\mathfrak{B}^{-1}$ nur nichtnegative Elemente; denn die Vorzeichenverteilung ist bei $\mathfrak{B}$:

$$(\mathfrak{B})=\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & + & 0 & \dots & 0 \\ - & - & + & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & - & - & \dots & + \end{pmatrix},$$

wobei an Stelle von negativen Elementen auch Nullen treten können; bei $\mathfrak{B}^{-1}$ hat man das Schema

$$(\mathfrak{B}^{-1})=\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & \dots & 0 \\ + & + & 0 & \dots & 0 \\ + & + & + & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ + & + & + & \dots & + \end{pmatrix},$$

wobei wieder an Stelle der positiven Elemente außerhalb der Hauptdiagonale Nullen treten können. Die Richtigkeit der behaupteten Vorzeichen ergibt sich leicht spaltenweise durch vollständige Induktion. Somit hat auch jetzt $\mathfrak{F}=-\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C}$ nur nichtnegative Elemente.

Zusammenfassend gilt daher: Ist bei einer Matrix $\mathfrak{A}$ mit $a_{jj}>0$, $a_{jk}\leq 0$ für $j\neq k$ das Iterationsverfahren in Gesamtschritten (bzw. in Einzelschritten) konvergent, so gelten die Aussagen A bis *C; es besteht die oben genannte Möglichkeit des Eingabelns.*

6. Anwendung auf Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind in vielen für die Anwendung wichtigen Fällen erfüllt. Wir geben einige Beispiele:

1. Der Randwertaufgabe

$$-\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dy}{dx}\right)+g(x)\,y=r(x), \quad y(a)=y_a, \quad y(b)=y_b \quad \dots\dots (23)$$

mit stetigem $g(x)$, $r(x)$, stetig differenzierbarem $f(x)$ und $f(x)>0$, $g(x)\geq 0$ in $a\leq x\leq b$ werden bei näherungsweiser Lösung mit dem gewöhnlichen Differenzenverfahren die Differenzengleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h^2}\left[-f_{j+\frac{1}{2}}\cdot Y_{j+1}+\left(f_{j+\frac{1}{2}}+f_{j-\frac{1}{2}}\right)Y_j-f_{j-\frac{1}{2}}Y_{j-1}\right]+g_j\,Y_j=r_j, \\ Y_0=y_a, \qquad Y_n=y_b, \qquad (j=1,\cdots,n-1) \end{aligned}\right\} \dots (24),$$

zugeordnet. Dabei ist das Intervall $\langle a,b\rangle$ in n gleiche Teile der Länge $h=\frac{1}{n}(b-a)$ zerlegt, und der Wert einer Funktion $f, g, \dots$ an der Stelle $x_k=a+kh$ wie üblich durch Anhängen des Index k gekennzeichnet, wobei k nicht ganzzahlig zu sein braucht. Y_j bezeichnet den durch Lösung des linearen Gleichungssystems (24) erhaltenen Näherungswert für die exakte Lösung $y(x_j)$. Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems erfüllt die oben von $\mathfrak{A}$ geforderten Vorzeichenbedingungen, und es konvergieren sowohl Gesamtschritt- als auch Einzelschrittverfahren[6]). Also bestehen hier die Aussagen A—C mit der Eingabelungsmöglichkeit.

[6]) L. Collatz: Über die Konvergenzkriterien bei Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Math. Z. 53 (1950), S. 149—161.

Entsprechend lassen sich die 2. und 3. Randwertaufgabe behandeln. Es seien etwa an Stelle der Randwerte y_a, y_b die Randbedingungen vorgegeben

$$y(a) - A_1 y'(a) = B_1, \qquad y(b) + A_2 y'(b) = B_2 \quad \ldots \ldots \ldots (25)$$

mit $a < b$, $A_1 > 0$, $A_2 > 0$. Dann verwenden wir (abweichend vom obigen) ein Gitter, bei dem die Stellen a und b zwischen zwei Gitterpunkten liegen: Die Maschenweite $h = \frac{b-a}{n}$ bleibt, aber die Gitterpunkte sind $x_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) h$. Den Randbedingungen entsprechen jetzt die Gleichungen:

$$\frac{Y_{-1} + Y_0}{2} - A_1 \frac{Y_0 - Y_{-1}}{h} = B_1, \qquad \frac{Y_{n-1} + Y_n}{2} + A_2 \frac{Y_n - Y_{n-1}}{h} = B_2$$

oder

$$Y_{-1}\left(\frac{A_1}{h} + \frac{1}{2}\right) - Y_0\left(\frac{A_1}{h} - \frac{1}{2}\right) = B_1, \qquad Y_n\left(\frac{A_2}{h} + \frac{1}{2}\right) - Y_{n-1}\left(\frac{A_2}{h} - \frac{1}{2}\right) = B_2 \quad . (26).$$

h sei bereits so klein gewählt, daß die runden Klammern positiv ausfallen. Dann sind alle Voraussetzungen (auch das „schwache Zeilensummenkriterium", welches die Konvergenz des Iterationsverfahrens sichert) erfüllt, und es gelten wieder A bis C.

2. Bei der elliptischen Differentialgleichung

$$L[u] = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} - g u = r \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

seien die gegebenen Funktionen a, c, d, e, g, r in einem Bereich der x-y-Ebene stetig, a, c positiv und g nichtnegativ. In einem rechteckigen Gitter mit den Maschenweiten h, l, den Gitterpunkten

$$\begin{aligned} x_j &= x_0 + jh \\ y_k &= y_0 + kl \end{aligned} \qquad (j, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

und Bezeichnung der Funktionswerte an einer Stelle x_j, y_k durch Anhängen der Indizes j, k entspricht der Differentialgleichung (27) die gewöhnliche Differenzengleichung für die Näherungswerte U_{jk}

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{2a_{jk}}{h^2} + \frac{2c_{jk}}{l^2} + g_{jk}\right) U_{jk} - \frac{1}{h^2}\left(a_{jk} - \frac{h}{2} d_{jk}\right) U_{j-1,k} - \frac{1}{h^2}\left(a_{jk} + \frac{h}{2} d_{jk}\right) U_{j+1,k} - \\ &- \frac{1}{l^2}\left(c_{jk} - \frac{l}{2} e_{jk}\right) U_{j,k-1} - \frac{1}{l^2}\left(c_{jk} + \frac{l}{2} e_{jk}\right) U_{j,k+1} + r_{jk} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (28).$$

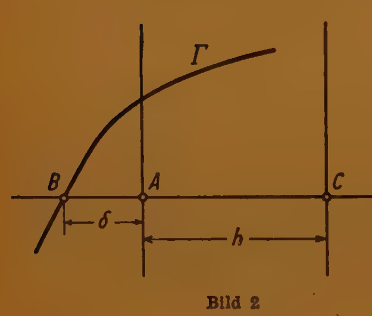


Bild 2

Es seien h und l so klein gewählt, daß alle runden Klammern nichtnegativ sind.

Sind längs einer Randkurve Γ die Werte von u vorgeschrieben, so treten mit den Bezeichnungen des Bildes 2 noch Gleichungen der Form hinzu

$$(\delta + h)\, u(A) - \delta u(C) = h u(B) \quad \ldots . (29),$$

wobei $u(B)$ gegeben ist. Auch jetzt sind die Vorzeichenforderungen erfüllt; es konvergieren Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren, und es bestehen daher die Aussagen A—C mit der Eingabelungsmöglichkeit. Auch hier lassen sich die Betrachtungen leicht auf allgemeinere Differentialgleichungen (z. B. in mehr Dimensionen) und auf andere Randbedingungen übertragen.

7. Beispiel für Durchführung der Fehlerabschätzung bei der Relaxation

Es sei für einen quadratischen Bereich $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

$$\Delta u = 0 \qquad \text{im Innern}$$

und auf dem Rande $u = y$ für $x = 0$, $x = 1$ und $y = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ für $y = 0$ vorgegeben; $u(x, y)$ läßt sich in bekannter Weise deuten als stationäre Temperaturverteilung (an drei Randgeraden vorgegebene Temperatur mit linearem Anstieg und längs der vierten Randgeraden Wärmeisolation, Bild 3). Bei Benutzung des Differenzenverfahrens mit der Maschenweite $h = \frac{1}{5}$ hat

man 10 unbekannte Funktionswerte. Durch Rechnung mit der gröberen Maschenweite $h = \frac{1}{3}$ und graphische Interpolation wurden die Ausgangswerte in Schema I jeweils links oben erhalten, z.B. an der Stelle A der Wert 0,63; aus Symmetriegründen ist nur die eine Hälfte des Quadrats gezeichnet. Die Mittelbildung aus den vier Nachbarwerten ergibt die Zahlen rechts oben, also 0,6275 an der Stelle A; die Änderungen sind in Einheiten der 4. Dezimale rechts unten hingeschrieben, bei A also —25. Nach Art der Relaxation wurden die Korrekturen von Schema II an den Funktionswerten angebracht, welche die Änderungen des Schemas III hervorrufen; in Schema III sind die von Schema I übernommenen Änderungen durch Unterstreichen gekennzeichnet. Bringt man die Korrekturen von Schema II an den Funktionswerten von Schema I an, so erhält man die neuen Funktionswerte links oben in Schema IV, wo also der maximale Änderungsbetrag von $200 \cdot 10^{-4}$ bereits auf $50 \cdot 10^{-4}$ heruntergedrückt ist.

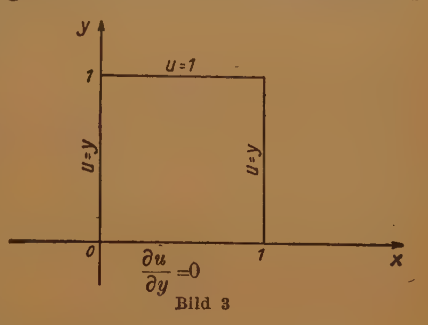


Bild 3

Durch Fortführung der Relaxation wurden die Änderungen auf $10 \cdot 10^{-4}$ (Schema V) und dann auf $2 \cdot 10^{-4}$ (Schema VI) herabgedrückt. Wollte man sie noch weiter verkleinern, so müßte man eine weitere Dezimale hinzunehmen. Nun interessiert, wieviele Dezimalen gesichert sind. In Schema VI sind alle Änderungen nichtnegativ, also liegt die gesuchte Lösung der Differenzengleichungen nirgendwo unterhalb der Funktionswerte in Schema VI. Nun wenden wir zweimal Blockrelaxation[7]) an, Schema VII und VIII, und zwar erhöhen wir alle Zahlen der Spalte $x=0,4$

I

	1,00	1,00	
0,80	0,81	8100 0,81	8150
		0	+50
0,60	A 0,63	6275 0,64	6425
		—25	+25
0,40	0,46	4550 0,49	4850
		—50	—50
0,20	0,30	3050 0,35	3650
		+50	+150
0	0,21	2300 0,32	3075
		+200	—125

II

	+60
	+40
+100	+200
+100	

III

0 +15	50 —45 +10
—25 +10	25 +15 —30
—50 +25	—50 +10 +25 +25
50 —100 +50 +25 +25	150 —75 —75 +25
+200 +50 —200	—125+50 +50 +50

IV

8100	8115 8160	8175
	+15	+15
6300	6285 6440	6450
	—15	+10
4600	4575 4900	4910
	—25	+10
3100	3150 3700	3725
	+50	+25
2300	2350 3200	3225
	+ 50	+25

V

8140	8135 8220	8215
	—5	—5
6320	6320 6500	6510
	0	+10
4640	4645 5000	5010
	+5	+10
3260	3255 3900	3895
	—5	—5
2480	2485 3420	3425
	+5	+5

VI

8136	8137 8220	8220
	+1	0
6328	6328 6524	6524
	0	0
4652	4653 5024	5026
	+1	+2
3260	3261 3904	3905
	+1	+1
2488	2488 3432	3432
	0	0

VII

+12	+8 +12
+12	+8 +12
+12	+8 +12
+12	+8 +12
+12	+8 +12

VIII

1+2 —6	0—4 —3
0+2 —3	0—2
1+2 —3	2—2
1+2 —3	1—2
0+2 —3	0—2

IX

—3	—7
—1	—2
0	0
0	—1
—1	—2

X

8148	8240
6340	6544
4664	5044
3272	3924
2500	3452

[7]) R. V. Southwell: Relaxation methods in Engineering Science. Oxford 1943. — Relaxation methods in Theoretical Physics. Oxford 1946.

um 8 Einheiten der 4. Dezimale, und dann alle Zahlen beider Spalten $x=0{,}2$ und $x=0{,}4$ nochmals um 12 Einheiten, und wir erhalten in Schema IX durch Addition der Änderungen von Schema VIII neue Änderungen, die sämtlich nichtpositiv sind. Wenn man also an den Funktionswerten von Schema VI alle Werte der linken Spalte $x=0{,}2$ um $12\cdot 10^{-4}$ und alle Werte der rechten Spalte $x=0{,}4$ um $20\cdot 10^{-4}$ erhöht, hat man in den Zahlen von Schema X sicher obere Schranken für die Lösung der Differenzengleichungen, und diese ist somit auf einfache Weise in Schranken eingeschlossen, also z. B. an der Stelle A: $0{,}6328 \leq u_A \leq 0{,}6340$. (Die Blockrelaxation ermöglicht so sehr rasch eine Einschließung; man könnte natürlich auf sorgfältigere Weise die großen Änderungen —3, —7 in Schema IX herabdrücken und engere Schranken gewinnen.)

Eingegangen am 31. Mai 1951.

KLEINE MITTEILUNGEN

Eine neue Zwangsführung zum Nyströmschen Stieltjesplanimeter.[1])

Das Stieltjesplanimeter dient bekanntlich[2])[3])[4])[5]) zur Auswertung von Integralen der Form

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, h'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dh(t),$$

welche als Stieltjesintegrale bezeichnet werden. Neben den Spezialinstrumenten für bestimmte Arten dieser Integrale, z. B. Momentenplanimetern, harmonischen Analysatoren usw., gestattet das Stieltjesplanimeter eine Auswertung bei beliebigen Funktionen $f(t)$ und $h(t)$ und zwar in folgender Weise: Der Fahrstift A (Bild 2) wird von einer ersten Bedienungsperson auf der Kurve $y=f(t)$ bzw. auf der Abszissenachse bewegt; eine zweite Bedienungsperson verfolgt mit einer Fahrlupe die auf dem beweglichen Tisch T befestigte Zeichnung der Kurve $x=h(t)$. E. Laurila[5]) ersetzt die Tätigkeit der zweiten Person durch eine mechanische Zwangsführung. Er bildet die Kurve $x=h(t)$ durch ein Stahlband nach, das auf dem beweglichen Tisch T befestigt wird, und setzt an Stelle der Fahrlupe eine Rollenführung, in welcher das Stahlband gleitet. Damit die Vorrichtung ohne Nachhilfe arbeitet, darf die Steigung der nachzufahrenden Kurve nicht größer als 70° werden. Ferner muß der Krümmungsradius der Kurve $h(t)$ stets größer als der Rollenradius bleiben.

Die neue Zwangsführung (Bild 1, 2 u. 3) vermeidet die hierin liegenden Beschränkungen. Sie verwendet Blechschablonen S in Form der Kurven $x=h(t)$. Am Rand gleitet ein Metallstift St, der durch ein Gewicht G mit dem Seilzug S_1 gegen den Rand von S gezogen wird. Bei großen Steigungen hebt man von Hand mit dem Seilzug S_2 den von G herrührenden Zug auf. Diese Betätigung von S_2 muß gleichzeitig mit dem Nachfahren der Kurve $y=f(t)$ erfolgen, so daß der Stift St ständig den Rand der Schablone berührt. Dies kann man bei einiger Übung ohne Schwierigkeiten erreichen.

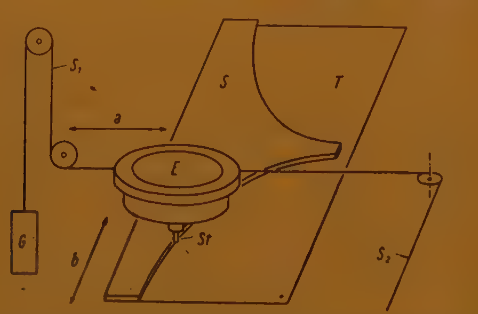


Bild 1. Prinzipskizze der neuen Zwangsführung mit Blechschablone (a = Bewegungsrichtung von E, b = Bewegungsrichtung von T)

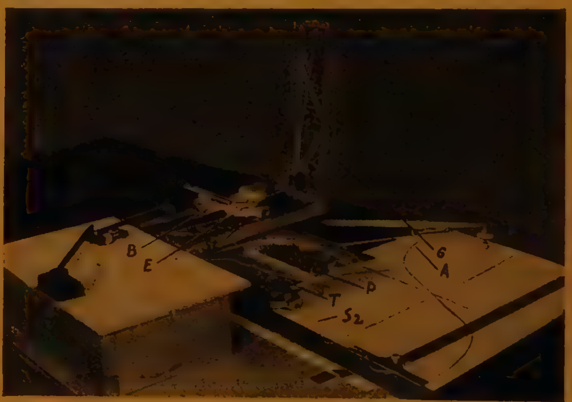


Bild 2. Gesamtansicht des Stieltjesplanimeters mit der neuen Zwangsführung

Damit ist es möglich, die Zwangsführung auf alle praktisch vorkommenden Kurven $x=h(t)$ anzuwenden, auch solche mit Ecken und mit nahe benachbarten Kurventeilen, wie sie durch Herausschneiden von Polen zustandekommen. Auch lassen sich die Schablonen S leicht auswechseln und verschiebbar anordnen wie etwa im nachfolgenden Beispiel. Ihre Herstellung ist oft einfacher als die Nachbildung der Kurve mit einem Stahlband.

Anwendungsbeispiel: Auf Anregung von H. Wittich (Karlsruhe) wurde mit Hilfe des Stieltjesplanimeters die Konvergenz der Iterationsfolge

$$g_{n+1}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[\alpha + g_n(\alpha)]\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha-\varphi}{2}\,d\alpha$$

mit

$$f(\Theta) = \ln\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\Theta} \quad \text{und} \quad g_0(\varphi) = 0$$

für verschiedene Werte von k untersucht. Der Integrand hat für $\alpha=\varphi$ einen Pol 1. Ordnung. Deshalb wurde das Integral zwischen den Grenzen $\varphi-\varepsilon$ und $\varphi+\varepsilon$ durch Reihenentwicklung des Integranden näherungsweise berechnet. Dabei wurde ε auf Grund einer Fehlerabschätzung beim ersten Iterationsschritt zu $\varepsilon=1°$ festgelegt.

---

[1]) Aus dem Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, Prof. Dr. A. Walther.

[2]) Fr. A. Willers; Mathematische Instrumente. (2. Aufl.) Berlin 1951.

[3]) W. Meyer zur Capellen; Mathematische Instrumente. 3. Aufl. Leipzig (Akadem. Verlagsgesellschaft) 1949.

[4]) E. J. Nyström; Ein Instrument zur Auswertung von Stieltjesintegralen. Soc. Sci. Fennica. Commentat. phys.-math. IX. 4. (1936).

[5]) E. Laurila; Über das Nyströmsche Stieltjesplanimeter. Soc. Sci. Fennica. Commentat. phys.-math. X. 7. (1939).

Um auf die Gestalt $\int f(\alpha)\, dh(\alpha)$ zu kommen, formen wir um:

$$\int_0^{2\pi} \ln [1-(1-k^2)\sin^2\Theta] \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi}{2}\, d\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln [1-(1-k^2)\sin^2\Theta]\, d\left(2\ln\left|\sin\frac{\alpha-\varphi}{2}\right|\right).$$

Die nachzufahrenden Kurven sind also

$$y = f(\alpha) = \ln [1-(1-k^2)\sin^2\Theta]$$

und

$$x = h(\alpha) = 2\ln\left|\sin\frac{\alpha-\varphi}{2}\right|.$$

In Polnähe tritt von $\alpha = \varphi - 1°$ bis $\alpha = \varphi + 1°$ an Stelle von $x = h(\alpha)$ eine Parallele zur α-Achse.

Die für die Auswertung verwendete Zwangsführung (Bild 3) setzt sich folgendermaßen zusammen: Die Schablone S aus 2 mm starkem Duraluminiumblech wird mit Hilfe einer Führungsleiste L in der Nut der auf den beweglichen Tisch T geschraubten Platte P verschieblich gelagert. Die Arretierung erfolgt mit Hilfe der beiden Schrauben M. Durch einen besonders angefertigten Einsatz E ist der Stift St fest mit dem beweglichen Schlitten B verbunden. Da man erreichen will, daß sich die mittlere Achse von St exakt auf der

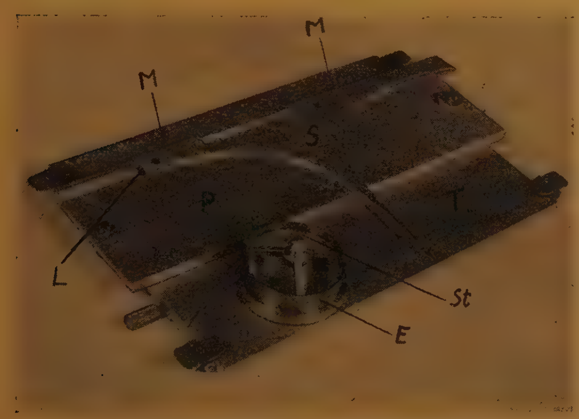


Bild 3. Einzelteile der neuen Zwangsführung

Kurve $x = h(\alpha)$ bewegt, legt man bei der Herstellung der Blechschablone die Parallelkurve im Abstand des halben Durchmessers von St zugrunde. Um Abweichungen an den Ecken der Kurve zu vermeiden, muß der Durchmesser von St möglichst klein gehalten werden. Er beträgt im vorliegenden Beispiel 0,6 mm.

Auf diese Weise war es möglich, die Konvergenz der vorgegebenen Iterationsfolge für $k = 0{,}9$ bis 0,5 nachzuweisen. Die mit der beschriebenen Zwangsführung erzielten Ergebnisse weichen bei Kontrollumfahrungen im allgemeinen nur 1 bis 2 Noniuseinheiten in den am Polarplanimeter abgelesenen Werten voneinander ab. Diese Genauigkeit kann eine zweite Bedienungsperson beim Nachfahren mit der Lupe nur in seltenen Fällen, unter erheblich größerem Zeitaufwand und mit starker Ermüdung erzielen.

Darmstadt. W. Knappe.

Iterationsverfahren zur Berechnung komplexer Nullstellen von Gleichungen.

Herr Collatz hat in der Z. angew. Math. Mech. 30 (1950) S. 97—101 ein Iterationsverfahren zur numerischen Lösung algebraischer Gleichungen angegeben, das in vielen Fällen wesentliche Vorzüge gegenüber sonst üblichen Methoden besitzt. Der Zweck der folgenden Mitteilung ist einerseits eine Vereinfachung des Konvergenzbeweises von Collatz, verbunden mit einer Erweiterung auf beliebige (nicht notwendig algebraische) Gleichungen, andererseits eine Verallgemeinerung auf Gleichungssysteme für mehr als eine Unbekannte.

I.

Wir beginnen mit dem Fall einer (nicht notwendig algebraischen) Gleichung

$$F(z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.1).$$

Jede solche Gleichung läßt sich mit

$$\varphi(z) \equiv z^m - F(z)\,; \quad F(z) \equiv z^m - \varphi(z) \quad \ldots (1.1\text{a})$$

auch schreiben in der Gestalt

$$z^{m+r} = \varphi(z)\cdot z^r \quad \ldots\ldots \quad (1.2)$$

oder

$$z = \Phi(z) \quad \text{mit} \quad \Phi(z) \equiv [\varphi(z)\cdot z^r]^{\frac{1}{m+r}} \quad \ldots (1.3).$$

Das Iterationsverfahren

$$z_{\nu+1} = \Phi(z_\nu) \quad \ldots\ldots \quad (1.4)$$

zur Berechnung einer Wurzel $z = \zeta$ der Gl. (1.1) konvergiert unter der Voraussetzung eines hinreichend guten Anfangswertes z_1 immer dann, wenn

$$|\Phi'(\zeta)| < 1 \quad \ldots\ldots \quad (1.5).$$

Nun folgt aber aus (1.3) mittels logarithmischer Differentiation (Nenner $\neq 0$ vorausgesetzt)

$$\frac{\Phi'}{\Phi} \equiv \frac{1}{m+r}\cdot\left[\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{r}{z}\right] \quad \ldots (1.6).$$

Für die Lösung $z = \zeta$ ist nach Gl. (1.1a) $\varphi(\zeta) = \zeta^m$ und nach Gl. (1.3) $\Phi(\zeta) = \zeta$. Für $z = \zeta$ folgt aus Gl. (1.6) daher sofort

$$\Phi'(\zeta) = \frac{1}{m+r}\cdot\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta^{m-1}}+r\right] \quad \ldots (1.7).$$

Bei gegebenem m (und gegebenem φ bzw. F) ist daher nicht nur Gl. (1.5) erfüllt, sondern sogar $\Phi'(\zeta) = 0$, wenn nur

$$r = -\frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta^{m-1}} \quad \ldots\ldots \quad (1.8)$$

und wenn zugleich $r \neq -m$ (und $\zeta \neq 0$.)

$r = -m = -\dfrac{\varphi'(\zeta)}{\zeta^{m-1}}$ würde bedeuten $m\cdot\zeta^{m-1} - \varphi'(\zeta) = 0$, d. h. wegen Gl. (1.1a), daß zugleich mit $F(\zeta) = 0$ auch $F'(\zeta) = 0$ wäre. Schließt man diesen Fall einer „mehrfachen" Wurzel (und den Fall $\zeta = 0$) aus, so ist der in Gl. (1.8) angegebene Wert von r für das Iterationsverfahren Gl. (1.4) immer brauchbar. Man hat daher den folgenden

Satz 1: Zu jeder Gl. (1.1) und jedem Exponenten m gibt es unter der Voraussetzung, daß $z = \zeta$ eine einfache von 0 verschiedene Lösung bedeutet, immer solche Werte von r, für die das Iterationsverfahren Gl. (1.4) unter der Voraussetzung eines hinreichend guten Anfangswertes konvergiert[1]).
Der günstigste Wert von r bei gegebenem m folgt dabei aus Gl. (1.8).

Zum Beweis des Satzes 1 war es nicht notwendig, $F = 0$ als algebraische Gleichung vorauszusetzen. Für die Brauchbarkeit des Verfahrens ist nun allerdings weniger die Aussage des Satzes 1 entscheidend, die hinreichend gute Anfangswerte voraussetzt; wichtiger ist in diesem Zusammenhang die für algebraische Gleichungen bereits von Collatz an Beispielen gezeigte verhältnismäßig geringe Empfindlichkeit der Rechnung gegenüber schlechten (von allen Lösungen ζ

---

[1]) Zur geeigneten Auswahl unter den Werten der (im allgemeinen mehrdeutigen) Funktion Φ vgl. Collatz.
Die von Collatz für algebraische Gleichungen behandelte Frage, inwieweit man mit reellem r auskommt, ist hier beiseite gelassen.

weit entfernten) Anfangswerten: während z. B. das Newtonsche Verfahren bei solchen „schlechten" Anfangswerten praktisch unbrauchbar ist, kann man bei algebraischen Gleichungen aus einem von allen Wurzeln ζ weit entfernten Anfangswert häufig mit wenigen Schritten des Verfahrens (1.4) die sämtlichen Wurzeln approximieren. Dies kann bei transzendenten Gleichungen natürlich nicht im gleichen Maß gelten, und zwar nicht nur deswegen, weil unendlich viele Wurzeln möglich sind; denn bei einer transzendenten Funktion F bzw. φ kann im allgemeinen die Multiplikation mit einer Potenz z^r, wie sie in Gl. (1.2) geschehen ist, überhaupt kein so kräftiges Mittel sein, um über weite Bereiche der z-Ebene hinweg soweit ausgleichend zu wirken, daß $\Phi' \approx 0$ würde.

Bei Beschränkung auf geeignete Bereiche der z-Ebene wirken sich trotzdem die Vorteile des Verfahrens auch für transzendente Gleichungen aus. Dies gilt besonders dann, wenn man (vgl. Collatz) die gegebene Gleichung statt in der Gestalt der Gl. (1.2) noch allgemeiner in der Gestalt

$$(z^p + a)^q = \psi(z) \quad \ldots\ldots\ (1.9)$$

schreibt und Gl. (1.9) als Ausgangspunkt für ein Iterationsverfahren verwendet ($a = 0$ gibt mit veränderten Bezeichnungen dasselbe wie Gl. (1.2)). Für die Praxis kommt es natürlich entscheidend darauf an, die gegebene Gleichung mit einer möglichst einfachen Potenz von z zu multiplizieren und damit zu erreichen, daß (1.5) bzw. die entsprechende Bedingung im Fall (1.9) für möglichst viele Lösungen gleichzeitig erfüllt ist.

II.

Wir betrachten als Beispiel die Gleichung

$$F = z^5 - 4iz^2 - 3e^z = 0 \quad \ldots\ldots\ (2.1).$$

Gesucht seien Lösungen mit negativem Realteil.

Wir multiplizieren mit z und erhalten

$$z^6 - 4iz^3 = 3ze^z \quad \ldots\ldots\ (2.2)$$

oder

$$(z^3 - 2i)^2 = -4 + 3ze^z \quad \ldots\ (2.3).$$

Dies hat die Gestalt der Gl. (1.9). Das zugehörige Iterationsverfahren lautet nun

$$z_{\nu+1} = \sqrt[3]{2i \pm \sqrt{-4 + 3z_\nu e^{z_\nu}}} = \psi(z_\nu) \quad (2.4).$$

Wir gehen aus von $z_1 = -1$ (für diesen Wert ist $\psi' = 0$) und erhalten bei Beschränkung auf solche z, deren Realteil nicht positiv ist, die Möglichkeiten

	A	B	C	(D)
z_2	$1{,}621 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$	$1{,}621 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$0{,}637 \cdot e^{-i \cdot \frac{5\pi}{6}}$	$0{,}637 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$
z_3	$1{,}622 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{5\pi}{6} + 0{,}006\right)}$	$1{,}707 \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + 0{,}003\right)}$	$0{,}637 \cdot e^{-i\left(\frac{5\pi}{6} - 0{,}065\right)}$	—
z_4		$1{,}711 \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + 0{,}008\right)}$	$0{,}641 \cdot e^{-i\left(\frac{5\pi}{6} - 0{,}074\right)}$	—

z_3 im Fall A, z_4 in den Fällen B und C geben bereits mit großer Genauigkeit je eine Lösung von Gl. (2.1); im Fall D wird der Realteil von z_3 positiv, wenn man in der Nähe von z_2 bleibt.

III.

Gegeben seien nun für die (reellen oder auch beliebig komplexen) Unbekannten x und y die beiden Gleichungen

$$F(x;y) = 0; \quad G(x;y) = 0\,^{2)} \quad \ldots\ (3.1).$$

[2]) Die Verallgemeinerung auf n Gleichungen mit n Unbekannten ergibt sich aus dem folgenden ohne weiteres und bedeutet im Grund genommen nur etwas mehr Schreibbarkeit. F und G sollen stetige Ableitungen 1. Ordnung besitzen.

Sie lassen sich mit

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x;y) &\equiv x^m y^n - F(x;y); \\ \psi(x;y) &\equiv x^r y^s - G(x;y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3.1a)$$

auch schreiben in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} x^{m+\mu} \cdot y^{n+\nu} &= \varphi(x;y) \cdot x^\mu \cdot y^\nu \equiv \Phi(x;y); \\ x^{r+\varrho} \cdot y^{s+\sigma} &= \psi(x;y) \cdot x^\varrho \cdot y^\sigma \equiv \Psi(x;y) \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

oder auch ($x \cdot y \neq 0$ vorausgesetzt)

$$\left.\begin{aligned} (m+\mu) \cdot \log x + (n+\nu) \log y &= \log \Phi(x;y); \\ (r+\varrho) \cdot \log x + (s+\sigma) \log y &= \log \Psi(x;y) \end{aligned}\right\} \quad (3.3).$$

Das zugehörige Iterationsverfahren (rechts $x = x_\nu$ und $y = y_\nu$, links $x = x_{\nu+1}$ und $y = y_{\nu+1}$ eingesetzt) erlaubt bei gegebenen x_ν und y_ν die Auflösung nach $x_{\nu+1}$ und $y_{\nu+1}$, wenn

$$D = \begin{vmatrix} m+\mu, & n+\nu \\ r+\varrho, & s+\sigma \end{vmatrix} \neq 0 \quad \ldots\ (3.4).$$

Man hat dann letzten Endes ein Iterationsverfahren

$$x_{\nu+1} = f(x_\nu; y_\nu); \quad y_{\nu+1} = g(x_\nu; y_\nu) \quad \ldots (3.5).$$

Dieses Verfahren konvergiert aber bei hinreichend guten Anfangswerten für eine gesuchte Lösung $(\xi;\eta)$ sicher, wenn nur die partiellen Ableitungen von f und g nach x und y im betrachteten Bereich klein genug sind. Dafür ist es nach (3.3) unter der Voraussetzung (3.4) am günstigsten, wenn für $x = \xi$; $y = \eta$ zugleich

$$\Phi_x = \Phi_y = \Psi_x = \Psi_y = 0 \quad \ldots\ (3.6)$$

(weil dann auch die partiellen Ableitungen von f und g nach x und y an der Stelle $(\xi;\eta)$ verschwinden). Dies bedeutet aber nach Gl. (3.2) bei gegebenen m; n; r; s nichts anderes, als daß (mittels logarithmischer Differentiation wie bei Gl. (1.6))

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_x}{\varphi} + \frac{\mu}{x} = 0; \quad \frac{\varphi_y}{\varphi} + \frac{\nu}{y} = 0; \\ \frac{\psi_x}{\psi} + \frac{\varrho}{x} = 0; \quad \frac{\psi_y}{\psi} + \frac{\sigma}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3.7)$$

für $x = \xi$; $y = \eta$ ($\xi \cdot \eta \neq 0$ vorausgesetzt).

Der Sonderfall, daß mit den hieraus gewonnenen Werten von μ; ν; ϱ; σ die Determinante $D = 0$ wird, ergibt

$$\left(m - \frac{x\varphi_x}{\varphi}\right) \cdot \left(s - \frac{y\psi_y}{\psi}\right) = \left(r - \frac{x\psi_x}{\psi}\right) \cdot \left(n - \frac{y\varphi_y}{\varphi}\right) \quad (3.8)$$

für $x = \xi$; $y = \eta$.

Durch Differentiation von (3.1a) folgt aber für diese Stelle z. B.

$$\varphi_x = m x^{m-1} y^n - F_x = \frac{m \cdot \varphi}{x} - F_x\,^{3)},$$

also

$$\left(m - \frac{x\varphi_x}{\varphi}\right) = + \frac{x F_x}{\varphi}.$$

Da Entsprechendes für F_y; G_x und G_y gilt, besagt Gl. (3.8) nichts anderes als

$$\frac{xy}{\varphi \cdot \psi} \cdot F_x G_y = \frac{xy}{\varphi \cdot \psi} \cdot G_x F_y$$

[3]) Wegen $F(\xi;\eta) = 0$.

oder

$$F_x : F_y = G_x : G_y \quad \text{für} \quad x = \xi;\ y = \eta \qquad (3.9),$$

d.h. an der betrachteten Stelle eine gemeinsame Tangente der Kurven $F(x;y) = 0$ und $G(x;y) = 0$ oder mindestens für eine der beiden Flächen $z = F(x;y)$ und $z = G(x;y)$ die xy-Ebene als Tangentialebene (so daß $(\xi;\eta)$ eine „mehrfache Lösung" wäre).

Das Ergebnis läßt sich zusammenfassen im folgenden

Satz 2: Zu jedem Gleichungssystem (3.1) und jedem Quadrupel von Exponenten m; n; r; s gibt es immer zugehörige Exponenten μ; ν; ϱ; σ, so daß das aus (3.3) gewonnene Iterationsverfahren (3.5) unter der Voraussetzung hinreichend guter Anfangswerte konvergiert, wenn eine im Sinn der Überlegungen zu Gl. (3.9) „einfache" Lösung mit $\xi\eta \neq 0$ gesucht ist.

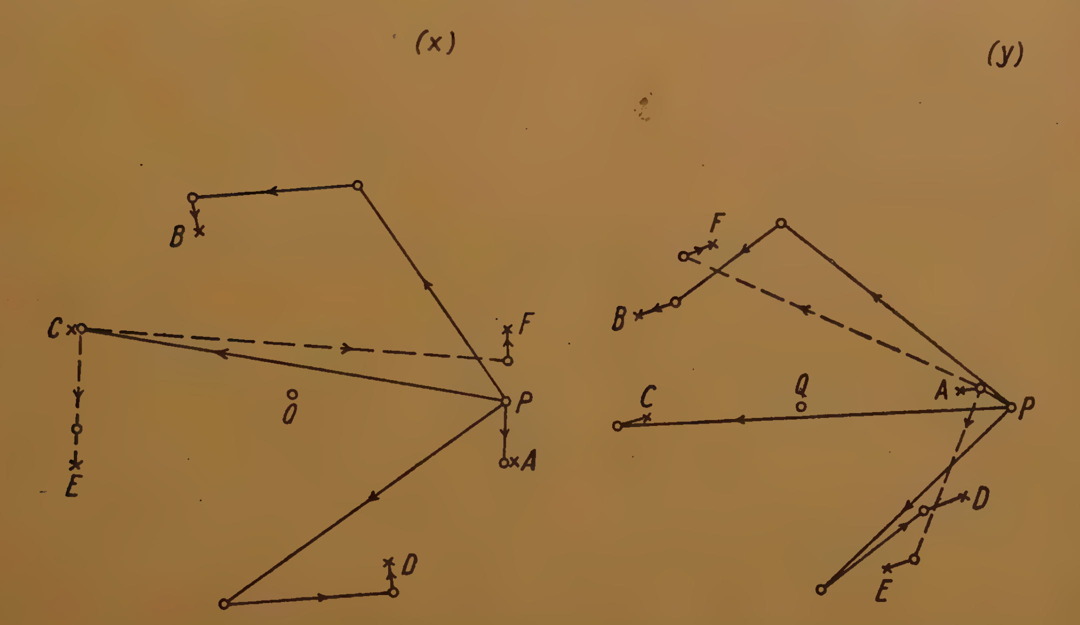


Bild 1. Beispiele für Lösungen des Gleichungssystems (4.1). Sowohl in der komplexen x-Ebene wie in der komplexen y-Ebene bedeutet jeweils der Punkt O den Ursprung und der Punkt P den Punkt $\sqrt{2}$ auf der reellen Achse

IV.

Die Rechenarbeit bei der Anwendung des Verfahrens auf Systeme von Gleichungen wird besonders einfach, wenn man die Exponenten so wählen kann, daß auf der linken Seite von (3.2) in der einen Gleichung bloß mehr x, in der anderen bloß mehr y steht; der Hauptvorteil liegt dabei in der Vermeidung von Scheinlösungen, die im allgemeinen Fall neben den gesuchten Werten aus (3.5) herauskommen und erst nachträglich durch die Probe wieder ausgeschieden werden müssen.

Beispiel: Gegeben sei

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv x^4 y^2 + 2ixy^3 - 4 = 0 \\ \text{und} \quad G &\equiv y^4 x^2 - x^3 y - 2i = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (4.1)$$

Gesucht seien Lösungen, bei denen die Winkel von x und y wenig voneinander abweichen. Wir multiplizieren mit y^{-2} bzw. x^{-2} und erhalten

$$x^4 = -2ixy + \frac{4}{y^2}; \qquad y^4 = xy + \frac{2i}{x^2} \qquad (4.2)$$

oder

$$x = \sqrt[4]{-2ixy + \frac{4}{y^2}}; \qquad y = \sqrt[4]{xy + \frac{2i}{x^2}}.$$

Ein Vergleich der einzelnen Glieder in (4.1) läßt Beträge von x und y zwischen 1 und 2 vermuten. Wir wählen daher als rechnerisch einfache „1. Näherung" die Werte $x_1 = y_1 = \sqrt{2}$. Einige mit Hilfe des zu (4.2) gehörigen Iterationsverfahrens aus dieser „1. Näherung" gewonnenen Lösungen sind in Bild 1 eingezeichnet (die Näherungen durch kleine Kreise, die richtigen Werte durch kleine Sterne angedeutet). Dabei ist natürlich z. B. für C bzw. D die Rechnung nicht mehr neu durchzuführen, wenn sie für A bzw. B schon vorliegt, da mit $(x;y)$ auch $(-x;-y)$ immer eine Lösung von Gl. (4.1) darstellt[4]).

Wird größere Genauigkeit der gesuchten Werte verlangt, so kann es zweckmäßig sein, daß man die Rechnung gegebenenfalls auf das Newtonsche Verfahren umstellt, wenn man einmal in der Nähe einer Nullstelle ist. Der entscheidende Vorteil des hier behandelten Verfahrens liegt, wie bereits gesagt, in der Möglichkeit, aus „schlechten" 1. Näherungen verhältnismäßig schnell zu solchen Werten der Unbekannten zu gelangen, die in der Nähe einer Lösung liegen.

München. F. Wenzl.

[4]) E und F als Beispiele für Lösungen von Gl. (4.1), für die arc x und arc y stark voneinander abweichen.

Der Beschleunigungswiderstand bewegter Körper in einer Flüssigkeit.

1. In einer interessanten Arbeit aus dem Jahre 1936 befaßte sich S. Neumark[1]) mit dem Beschleunigungswiderstand geradlinig bewegter Körper in einer idealen Flüssigkeit. Wird der Körper in der x-Richtung beschleunigt mit der Geschwindigkeit $u = u(t)$ durch die zuvor ruhende ideale Flüssigkeit bewegt, bzw. umgekehrt der ruhende Körper in der x-Richtung entsprechend beschleunigt angeströmt, so gilt, wenn der (Druck-)Widerstand im ersten Falle mit W' im zweiten Falle mit W bezeichnet wird, nach S. Neumark

$$W - W' = M\frac{du}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

[1]) S. Neumark: Beschleunigungswiderstand geradlinig bewegter Körper in einer idealen Flüssigkeit; Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 117—120.

wo M die Masse der verdrängten Flüssigkeit ist; von äußeren Kräften ist hierbei abgesehen. Wir zeigen im folgenden,

a) wie man das Neumarksche Ergebnis ohne Rechnung erhalten kann,

b) daß es auch für eine Klasse nichtgradliniger Bewegungen gilt, und schließlich

c) daß dasselbe Ergebnis auch dann noch zu Recht besteht, wenn man die Zähigkeit berücksichtigt. Am Schluß folgt noch eine Bemerkung zur Föttingerkuppelung.

2. x, y, z sei das raumfeste System, x', y', z' das dazu parallele körperfeste System. Der Körper bewege sich in der x-Richtung mit der Geschwindigkeit u durch die im Unendlichen ruhend gedachte ideale Flüssigkeit; sein Widerstand (im x, y, z-System!) sei W'. Gehen wir jetzt auf das System x', y', z', so wirkt dort in der x'-Richtung die scheinbare Kraft $-\varrho \frac{du}{dt}$ pro Volumeneinheit (ϱ = Dichte der Flüssigkeit). Der Körper wird jetzt beschleunigt angeströmt, und nach wie vor ist der Widerstand W'. „Löscht" man aber nun das scheinbare Kraftfeld, indem man sich die beschleunigte Anströmung allein durch Druckkräfte hervorgerufen denkt, so kommt zu dem bislang herrschenden Druckgefälle $-\frac{\partial p}{\partial x}$ noch hinzu $-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho \frac{du}{dt} x\right)$, d. h. der Druck erhöht sich von p auf $p+\varrho \frac{du}{dt}$. Der neue Widerstand W ist also um so viel größer geworden, als der „Auftrieb" des Körpers im vorher bestehenden scheinbaren Kraftfeld ausmacht, mit anderen Worten es gilt Gl. (1).

Diese Betrachtung ergibt von selbst mehr. Wird der Körper beliebig bewegt, doch so, daß das körperfeste System x', y', z' stets parallel dem System x, y, z bleibt, ist seine Führungsbeschleunigung $\mathfrak{b}_f$, und sein Widerstand $\mathfrak{W}'$, ist weiter $\mathfrak{W}$ der Widerstand des ruhend gedachten Körpers, wenn man die betr. Anströmung allein durch Druckkräfte hervorruft, so gilt

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}' - \mathfrak{A} \quad \ldots \ldots \ldots (2),$$

wo $\mathfrak{A}$ der Auftrieb des Körpers vom System x', y', z' aus in dem scheinbaren Kraftfeld $\{-\mathfrak{b}_f\}$ (pro Masseneinheit) ist.

Und offenbar gilt die Argumentation auch dann noch, wenn die Zähigkeit berücksichtigt wird.

3. Aus dem Vorstehenden sieht man auch deutlich, warum ein ähnlicher Satz nicht mehr gilt, wenn man Drehbewegungen des Körpers zuläßt. Denn dann treten vom System x', y', z' aus betrachtet Corioliskräfte auf, die sich nicht aus einem Potential ableiten lassen, so daß man die Anströmung jetzt nicht mehr durch Druckkräfte allein realisieren kann. In der Tat ist ja bei einer Drehung mit dem Drehvektor $\mathfrak{d}$ die Relativströmung von Wirbeln der konstanten Dichte $-2\mathfrak{d}$ durchsetzt. So betrachtet erscheint es uns auch nur bedingt richtig, wenn man, wie das mitunter geschieht, die Wirkungsweise der Föttinger-Kupplung dahingehend erklärt, daß man sagt, die Corioliskräfte würden gegen die Wände des oberen Blätterkranzes (diesen als ruhend gedacht) drücken; denn eine Druckkraft können diese Kräfte nicht ergeben. Das Bild zeigt stark schematisiert eine Kammer des oberen Blätterkranzes, welcher an der Arbeitsachse hängt, von oben betrachtet. $\mathfrak{v}_r$ ist die (relative) Geschwindigkeit, $\mathfrak{C}$ deutet die Corioliskraft und $\mathfrak{Z}$ die Zentrifugalkraft an; letztere wird hier im Gegensatz zu oben nicht ausgelöscht. Wendet man nun den Impulssatz in der y'-Richtung auf den in dem Bild gestrichelt abgegrenzten Bereich an, so liefert hierfür weder der Impulstransport noch die Zentrifugalkraft (in erster Näherung) einen Beitrag, jedoch die Corioliskraft einen Beitrag >0. Dieser Beitrag muß also allein durch die Druckkräfte auf den gestrichelten Flüssigkeitskörper kompensiert werden, d. h. also umgekehrt

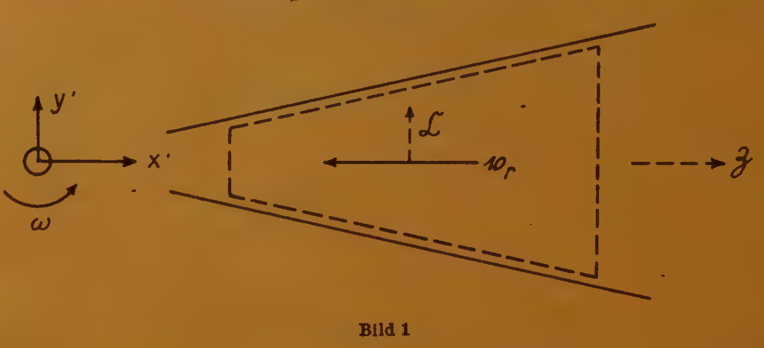


Bild 1

die Flüssigkeit drückt alles in allem auf die Wände nach oben in der y'-Richtung.

Berlin. **Ernst Mohr.**

Ermittlung der Wirk- und Blindleistung bei mittelbarem Antrieb des einfachen Schwingers.

Die Kenntnis der Wirk- und Blindleistung des Antriebes ist von Interesse z. B. bei der Bestimmung des Wirkungsgrades des Antriebes von schwingungstechnischen Arbeitsmaschinen und der Bemessung der Größe des Schwungrades zur Begrenzung des Ungleichförmigkeitsgrades auf ein bestimmtes Maß. Unter Wirkleistung $l_w(t)$ verstehen wir das Produkt der mit der Geschwindigkeit $v(t) = V \cos(\Omega t + \varepsilon)$ des Kraftangriffspunktes in Phase liegenden Komponente $p'(t)$ der Antriebskraft $p(t) = P \cos(\Omega t)$, unter Blindleistung $l_{bl}(t)$ das Produkt der mit $v(t)$ in Gegenphase befindlichen Komponente $p''(t)$ der Antriebskraft.

$$l_w = \frac{P' V}{2} (1 + \cos 2\,\Omega t)\,; \quad l_{bl} = -\frac{P'' V}{2} \sin 2\,\Omega t\,.$$

Bei mittlbarem Antrieb ist die Auslenkung $u(t)$ bzw. die Auslenkungsgeschwindigkeit des Kraftangriffspunktes gegeben, die Größe und Phase der Antriebskraft selbst dagegen nicht. Zunächst behandeln wir das einfache Beispiel des durch eine zweite Feder mittelbar angetriebenen Schwingers (vgl. Bild 1). Der Schwingungsvorgang findet seine mathematische Formulierung in der D-Gleichung

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + c_1 q = c_2 (u - q) \quad \ldots \ldots (1),$$

die auch wie folgt geschrieben werden kann

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + (c_1 + c_2)\, q = c_2\, u \quad \ldots \ldots (1a).$$

Für die Bestimmung der Auslenkung, Auslenkungsgeschwindigkeit und -Beschleunigung der Masse a ist also ein Ersatzsystem entsprechend Bild 2 gleichwertig mit dem in Bild 1. Auch für die Berechnung der Wirkleistung sind in diesem Falle Bild 1 und 2 einander gleichwertig, da die Wirkleistung hier die im Dämpfer b in Wärme umgesetzte Antriebsleistung bedeutet, die lediglich von der Auslenkungsgeschwindigkeit der Masse a abhängt. Bei der Ermittlung der Blindleistung führt jedoch im vorliegenden Falle die Benutzung des Ersatzsystemes gemäß Bild 2 zum falschen Ergebnis[1]). Man sollte daher stets die Bestimmung der Leistungsgrößen auf Grund des „Original"-Ersatzsystems (Bild 1) und nicht unter Bezugnahme auf ein „abgeleitetes" Ersatzsystem (Bild 2) durchführen.

[1]) Vgl. K. Klotter: Technische Schwingungslehre. 1. Bd., 2. Aufl.. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951, S. 213.

In komplexer Schreibweise läßt sich die komplexe Amplitude $\mathfrak{P}$ der Antriebskraft und die komplexe Amplitude $\mathfrak{V}$ der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes wie folgt ausdrücken [2])

$$\mathfrak{P} = c_2(\mathfrak{U} - \mathfrak{Q}) = c_2\left[\mathfrak{U}\left(1 - \frac{c_2}{c}\mathfrak{y}_3\right)\right]$$

mit

$$\mathfrak{y}_3 = \frac{(1-\eta^2) - 2D\eta i}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}\,; \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$\mathfrak{V} = i\Omega\mathfrak{U}.$$

Darin bedeuten

$c = c_1 + c_2$ Federkonstanten

$\mathfrak{y}_3$ die hier gültige reduzierte kinetische Einflußzahl

Ω Kreisfrequenz der Erregung

ω Kreisfrequenz der Eigenschwingung des Systems

$D = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$ dimensionsloses Dämpfungsmaß.

Die mit $\mathfrak{V}$ in Phase liegende Komponente der Antriebskraft beträgt also

$$\mathfrak{P}' = \frac{c_2^2}{c}\mathfrak{U}\cdot\frac{2D\eta i}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \quad \ldots \quad (2a),$$

die in Gegenphase befindliche

$$\mathfrak{P}'' = c_2\mathfrak{U}\left(1 - \frac{c_2}{c}\cdot\frac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}\right) \quad (2b).$$

Daraus folgt nach einfachen Umformungen als Amplitude der Wirkleistung[3])

$$L_w = \frac{U^2}{2}\,\frac{c_2^2}{\sqrt{ac}}\cdot\frac{2D\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \quad \ldots \quad (3a)$$

und als Amplitude der Blindleistung[3])

$$L_{bl} = \frac{U^2}{2}\,\frac{c_2^2}{\sqrt{ac}}\left|\frac{c}{c_2}\eta - \frac{\eta(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}\right| \quad (3b).$$

Für den Fall, daß der mittelbare Antrieb nicht über eine Zusatzfeder erfolgt (vgl. Bild 3) ist in Gl. (3a) und (3b) c_2 durch c zu ersetzen.

[2]) Vgl. ebenda, S. 183 ff.

Zur Ermittlung der den Gl. (3a) und (3b) entsprechenden Ausdrücke bei mittelbarem Antrieb des Schwingers über einen zusätzlichen Dämpfer (vgl. „Original"-Ersatzsystem Bild 4) darf wiederum nicht das „abgeleitete" Ersatzsystem nach Bild 5 der Rechnung zugrunde gelegt werden.

Als komplexe Amplitude der Antriebskraft erhalten wir

$$\mathfrak{P} = i b_2\Omega(\mathfrak{U} - \mathfrak{Q}) = i\Omega b_2\mathfrak{U}\left(1 - \frac{b_2}{b}\mathfrak{y}_2\right)$$

mit

$$\mathfrak{y}_2 = \frac{2D\eta\,[2D\eta + i(1-\eta^2)]}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2},$$

für die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes

$$\mathfrak{V} = i\Omega\mathfrak{U}.$$

Darin bedeuten

$b = b_1 + b_2$ Dämpfungskonstanten

$\mathfrak{y}_2$ die hier gültige reduzierte kinetische Einflußzahl.

Entsprechend Gl. (2a) und (2b) ergeben sich die in Phase bzw. in Gegenphase mit $\mathfrak{V}$ befindlichen Komponenten der komplexen Kraftamplitude

$$\mathfrak{P}' = i\Omega b_2\mathfrak{U}\left(1 - \frac{b_2}{b}\cdot\frac{4D^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}\right) \quad (4a)$$

$$\mathfrak{P}'' = \Omega\frac{b_2^2}{b}\mathfrak{U}\,\frac{2D\eta(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \quad \ldots \quad (4b)$$

Wir erhalten somit für die Amplitude der Wirk- bzw. Blindleistung[3]) nach einfacher Zwischenrechnung

$$L_w = \frac{U^2}{2}\sqrt{\frac{c^3}{a}}\left(\frac{b_2}{b}\right)^2\left|\frac{8D^3\eta^4}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} - \frac{2bD\eta^2}{b_2}\right| \quad (5a)$$

$$L_{bl} = \frac{U^2}{2}\sqrt{\frac{c^3}{a}}\left(\frac{b_2}{b}\right)^2\frac{4D^2\eta^3(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \quad \ldots \quad (5b).$$

[3]) Vgl. Gl. (63.8) auf S. 213 des angezogenen Buches von K. Klotter.

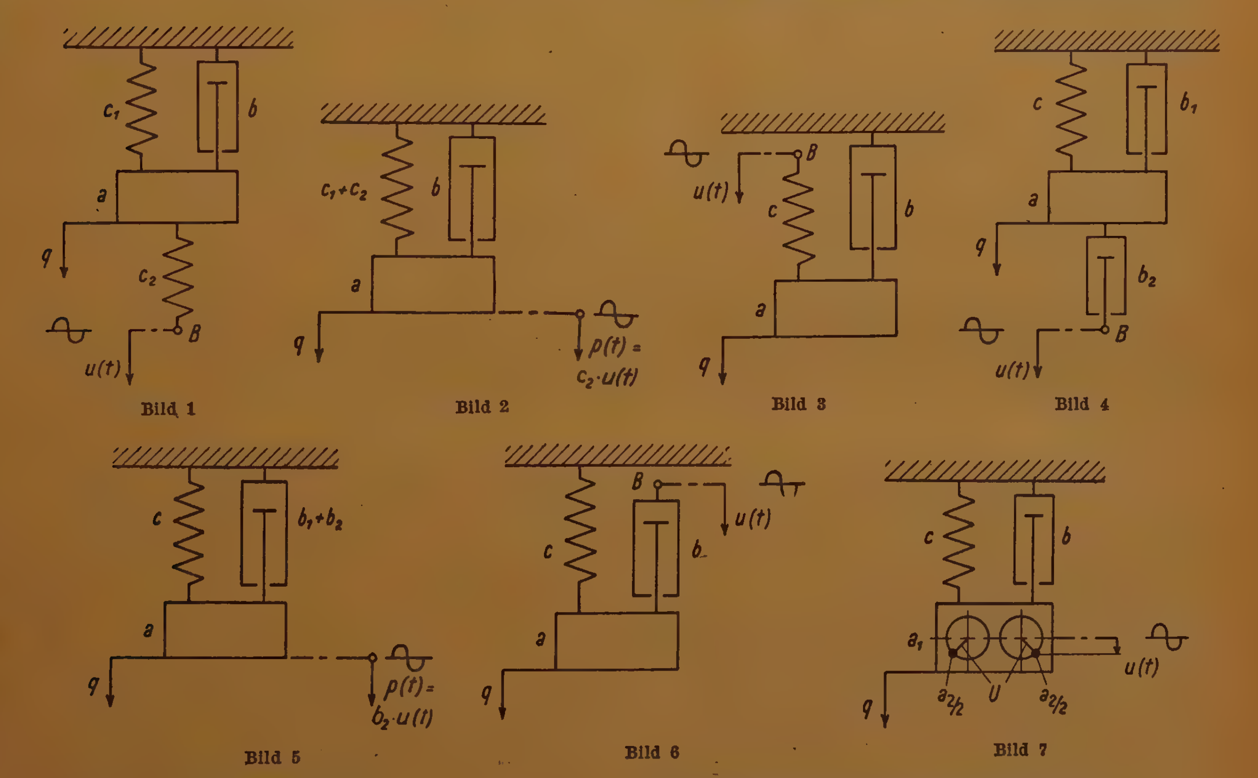


Bild 1 Bild 2 Bild 3 Bild 4 Bild 5 Bild 6 Bild 7

Erfolgt der mittelbare Antrieb ohne Zusatzdämpfer (vgl. Bild 6), so ist in Gl. (5a) und (5b) b_2 durch b zu ersetzen.

Als letzten Fall untersuchen wir den des Antriebes durch Massenkräfte (vgl. Bild 7). Die Resultierende der komplexen Amplituden der Beschleunigung der rotierenden Massenpunkte a_2 beträgt

$$-\Omega^2(\mathfrak{Q}+\mathfrak{U}) \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Die komplexe Amplitude der an a_2 in Schwingungsrichtung angreifenden Antriebskraft zur Überwindung des durch die Beschleunigung (6) hervorgerufenen Trägheitswiderstandes ergibt sich also zu

$$\mathfrak{P} = a_2\Omega^2(\mathfrak{Q}+\mathfrak{U}) = a_2\Omega^2\mathfrak{U}\left(1-\frac{a_2}{a}\mathfrak{v}_1\right) \quad . \quad (7)$$

mit

$$a = a_1 + a_2$$

und

$$\mathfrak{v}_1 = -\frac{\eta^2(1-\eta^2)+2D\eta^3 i}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}.$$

Die mit der komplexen Amplitude $i\Omega\mathfrak{U}$ der Relativgeschwindigkeit der umlaufenden Massen in Phase bzw. in Gegenphase befindliche Komponente von (7) ist damit

$$\mathfrak{P}' = \frac{a_2^2}{a}\Omega^2\mathfrak{U}\cdot\frac{2D\eta^3 i}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2} \quad . \; . \quad (8a)$$

bzw.

$$\mathfrak{P}'' = a_2\Omega^2\mathfrak{U}\left[1+\frac{a_2}{a}\,\frac{\eta^2(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}\right] \quad (8b)$$

Nach einigen einfachen Umformungen erhalten wir dann für die Amplitude der Wirkleistung[4])

$$L_w = \frac{U^2}{2}\sqrt{\frac{c^3}{a}}\left(\frac{a_2}{a}\right)^2\frac{2D\eta^6}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2} \quad (9a)$$

und für die Amplitude der Blindleistung[4])

$$L_{bl} = \frac{U^2}{2}\left(\frac{a_2}{a}\right)^2\sqrt{\frac{c^3}{a}}\left|\frac{a}{a_2}\eta^3+\frac{\eta^6(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}\right| \quad (9b).$$

Hannover. E. Pestel.

[4]) Vgl. Gl. (63.9) auf S. 213 des angezogenen Buches von K. Klotter.

Der Krümmungseffekt bei dickwandigen Hochdruckrohren beliebiger asymmetrischer Querschnittsformen[1]).

Zur Messung hoher Flüssigkeitsdrücke werden in der Technik neben elektrischen Verfahren vor allem rohrförmige elastische Meßorgane benutzt. Bei einem in neuerer Zeit bekannt gewordenen elastischen Hochdruckmeßorgan nutzt man die Durchkrümmung eines exzentrisch gebohrten Rohres unter der Wirkung eines Innendruckes aus. Dieser Effekt kommt dadurch zustande, daß der Schwerpunkt O (Bild 1) der Ringfläche und der Angriffspunkt M der auf die beiden Enden wirkenden Axialkraft nicht zusammenfallen, so daß ein Biegemoment entsteht, das eine Krümmung des ursprünglich geraden Rohres verursacht. Diese Wirkung wird jedoch durch den Einfluß der Querkontraktion geschwächt, da auf der schwächeren Wandseite, wie in Bild 1 durch die Länge der Pfeile angedeutet ist, die Tangentialspannungen größer sind als auf der stärkeren Wandseite. Damit werden aber wegen der Querkontraktion die Axialspannungen auf der schwächeren Wandseite verstärkt, auf der anderen Seite geschwächt. Die genaue Rechnung[2]) hat gezeigt, daß der Einfluß der Querkontraktion sich bei einem exzentrisch gebohrten Rohr in einem Faktor $(1-2/m)$ auswirkt. Versuche haben im Einklang damit gezeigt, daß der ursprüngliche Krümmungseffekt, der ja elementar zu berechnen ist, durch die Querkontraktion auf die Hälfte herabgesetzt wird. Die Vermutung liegt

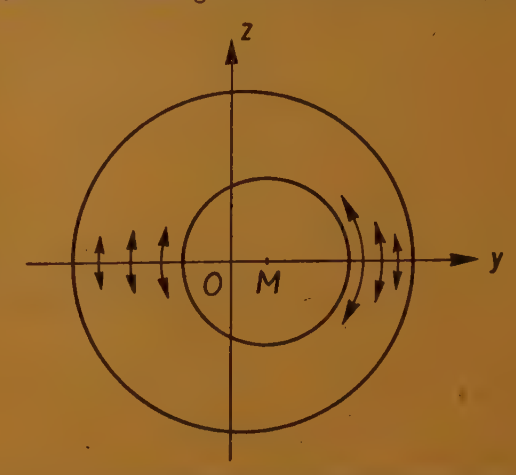


Bild 1. Krümmungseffekt beim exzentrisch gebohrten Rohr

nahe, daß der Einfluß der Querkontraktion sich ganz allgemein bei beliebigen asymmetrischen Querschnittsformen des Hochdruckrohres in einem Faktor $(1-2/m)$ äußert, mit dem der primäre Krümmungseffekt zu multiplizieren ist. Diese Vermutung wird durch die folgende Untersuchung bestätigt.

Wir nehmen also einen beliebigen Rohrquerschnitt an, von dem wir zunächst nur voraussetzen, daß er eine einzige Bohrung enthält, die von einem Flüssigkeitsdruck p beaufschlagt wird. Die Querschnittsfläche ist also zweifach zusammenhängend. Die Länge des Rohres sei groß gegenüber den Querschnittsabmessungen, so daß man mit genügender Näherung einen ebenen Formänderungszustand voraussetzen kann. Die beiden Rohrenden üben offenbar eine Axialkraft pQ_i aus, wenn man mit Q_i den lichten Innenquerschnitt bezeichnet. Weitere äußere Kräfte oder Momente seien dagegen nicht vorhanden. Das Koordinatensystem kann in der Querschnittsebene natürlich beliebig gelegt werden. Um die Rechnung zu vereinfachen, legen wir es so, daß der Koordinatenursprung mit dem Schwerpunkt O der Ringfläche Q zusammenfällt und die y-Achse durch den Schwerpunkt M der Innenfläche Q_i geht. Die Axialspannung σ_x ist dann gegeben durch:

$$\sigma_x = (k+iy+jz)\,E+\frac{1}{m}(\sigma_y+\sigma_z)\,. \quad . \quad (1).$$

Hierbei ist k die noch unbekannte axiale Dehnung und i, j sind die Krümmungen in y und z-Richtung (d. h. die reziproken Krümmungsradien in der xy- und xz-Ebene).

Bei Einführung der Airyschen Spannungsfunktion F ist die Spannungssumme in bekannter Weise durch $\sigma_y+\sigma_z=\Delta F$ gegeben. Die drei Konstanten sind aus folgenden Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} \int \sigma_x\,dQ &= Q_i\,p \\ \int \sigma_x\,y\,dQ &= Q_i\,a\,p \\ \int \sigma_x\,z\,dQ &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

oder nach Einsetzen von Gl. (1):

$$\left.\begin{aligned} Q\,k\,E+\frac{1}{m}\int \Delta F\,dQ &= Q_i\,p \\ J_y\,i\,E+jJ_{yz}E+\frac{1}{m}\int \Delta F\,y\,dQ &= Q_i\,a\,p \\ J_{yz}\,i\,E+j\,J_z\,E+\frac{1}{m}\int \Delta F\,z\,dQ &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

[1]) Vorgetragen auf dem Mechanik-Kolloquium der Niedersächsischen Hochschulen in Göttingen 7. Juli 1951.

[2]) W. Wuest; Theorie des Hochdruckmeßrohres mit ausmittiger Bohrung. Ing.-Arch. 19 (1951), S. 12—21.

Hierbei bezeichnet Q die Ringfläche und dQ ein Flächenelement der Ringfläche, J_y und J_z sind die Trägheitmomente, J_{yz} das Zentrifugalmoment der Ringfläche. Die Integrale sind über die Ringfläche zu erstrecken. Die Flächenintegrale können aber sofort in Integrale über die beiden geschlossenen Randkurven umgeformt werden:

$$\left.\begin{aligned}\int_Q \Delta F\,dQ &= \int_Q \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) dy\,dz \\ &= \oint_s \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,dz - \frac{\partial F}{\partial z}\,dy\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_Q \Delta F\,y\,dQ &= \int_Q \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) y\,dy\,dz \\ &= \oint_s \left(y\frac{\partial F}{\partial y} - F\right) dz - \oint_s y\frac{\partial F}{\partial z}\,dy\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_Q \Delta F\,z\,dQ &= \int_Q \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) z\,dy\,dz \\ &= \oint_s \left(z\frac{\partial F}{\partial z} - F\right) dy - \oint_s z\frac{\partial F}{\partial y}\,dz\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Vorzeichen sind dabei so gewählt, daß die beiden Randkurven im Zeigersinn von Bild 2 zu umlaufen sind. Die Spannungsfunktion F und ihre ersten par-

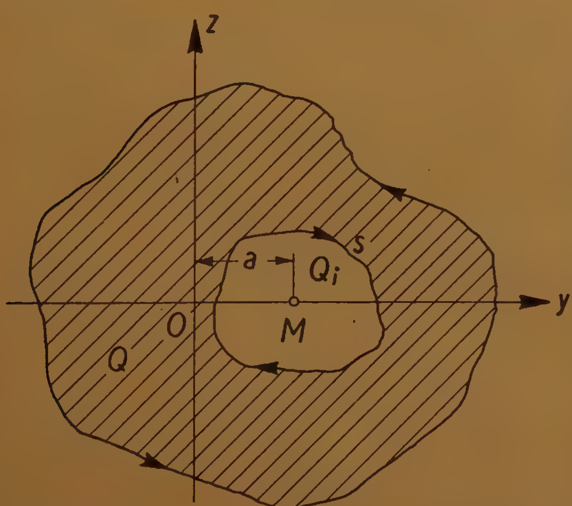


Bild 2. Rohrquerschnitt beliebiger Form. Der Koordinatenursprung ist in den Schwerpunkt O der Ringfläche Q gelegt

tiellen Ableitungen $\partial F/\partial y$ und $\partial F/\partial z$ sind aber auf den Randkurven durch die Randbedingungen gegeben. Es gelten nämlich bei ebenem Spannungs- oder Formänderungszustand folgende Oberflächenbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y \cos(n,y) + \tau_{zy}\cos(n,z) &= p_y \\ \tau_{yz}\cos(n,y) + \sigma_z \cos(n,z) &= p_z\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7).$$

Setzt man (vgl. Bild 3):

$$\cos(n,y) = \frac{\partial z}{\partial s};$$

$$\cos(n,z) = -\frac{\partial y}{\partial s};$$

so gehen die Bedingungen Gl. (7) mit

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

und

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}$$

über in:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial z} = p_y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial y}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial y} = -p_z$$

Bei reiner Normalbelastung der Oberfläche durch einen gleichmäßigen Flüssigkeitsdruck ist aber:

$$p_y = -p\cos(n,y) = -p\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$p_z = -p\cos(n,z) = p\frac{\partial y}{\partial s}$$

so daß also auf der inneren Randkurve gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_s -p\,dy + C_1 = -py + C_1 \quad . . (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_s -p\,dz + C_2 = -pz + C_2 \quad . . . (9)$$

$$\left.\begin{aligned}F &= \int_s \left(\frac{\partial F}{\partial y}\partial y + \frac{\partial F}{\partial z}\partial z\right) \\ &= -\frac{p}{2}(y^2+z^2) + C_1 y + C_2 z + C_3\end{aligned}\right\} (10).$$

An der äußeren Randkurve ist $p=0$. Jedoch tritt dort ein weiteres Konstantentripel C_1', C_2', C_3' auf. Ebenso treten bei mehr als einer Bohrung an jeder neuen Randkurve weitere Konstantentripel auf, von denen aber eines willkürlich gewählt werden kann. Wir setzen also im vorliegenden Fall nur einer Boh-

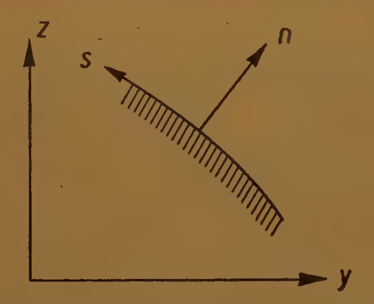


Bild 3. Normalenrichtung an der Berandung des Ringquerschnittes

rung $C_1' = C_2' = C_3' = 0$ und brauchen die Integration also nur noch über die innere Randkurve zu erstrecken.

Das Integral Gl. (4) nimmt damit folgende Form an:

$$\int_Q \Delta F\,dy\,dz = \oint_s (-py + C_1)\,dz - \oint_s (-pz + C_2)\,dy.$$

Die Glieder mit C_1 und C_2 verschwinden bei der Integration und mit $dz = \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$ erhält man:

$$\int_Q \Delta F\,dy\,dz = 2p\oint_s z\,dy = 2pQ_i.$$

Damit liefert die erste Gl. (3) für die axiale Dehnung k die einfache Beziehung:

$$k = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{p}{E}\frac{Q_i}{Q} \quad \ldots\ldots (11)$$

Ganz entsprechend können auch die Integrale Gl. (5) und (6) ausgewertet werden.

$$\int_Q \Delta F\, y\, dy\, dz = \oint_s y(-py + C_1)\, dz + \oint_s \left[\frac{p}{2}(y^2+z^2) - C_1 y - C_2 z - C_3\right] dz + \oint_s y(pz - C_2)\, dy = \oint_s 2p\, yz\, dy = 2p\, a\, Q_i\,.$$

Hierbei ist a wiederum der Abstand des Schwerpunktes M der Innenfläche Q_i vom Schwerpunkt der Ringfläche.

In entsprechender Weise findet man

$$\int_Q \Delta F z\, dy\, dz = 2p \oint_s yz\, dz = 0\,.$$

da die y-Achse eine Schwerpunktsachse des Innenquerschnitts ist. Man erhält damit für die Krümmungskomponenten:

$$i = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{a Q_i J_z}{J_y J_z - J_{yz}^2} \frac{p}{E}$$

$$j = -\left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{a Q_i J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2} \frac{p}{E}\,.$$

Bei einem Ringquerschnitt mit einfacher Symmetrie (z. B. exzentrisch gebohrtes Rohr) ist das Deviationsmoment $J_{yz} = 0$ und die Krümmungsebene fällt mit der Symmetrieebene zusammen.

Die vorstehenden Überlegungen können ohne weiteres auch auf mehrfach durchlochte Querschnitte angewandt werden, da die Konstanten C_1, C_2, C_3 im Ergebnis nicht vorkommen. Auch wenn die verschiedenen Bohrungen mit verschiedenen Flüssigkeitsdrücken beaufschlagt werden, äußert sich die Querkontraktion stets in einem Faktor $(1-2/m)$ für die Krümmung. Diese Gesetzmäßigkeit gilt natürlich nicht, wenn das Rohr nicht mehr durch reinen Flüssigkeitsdruck beaufschlagt wird. Doch können auch in diesem allgemeineren Fall die Längsdehnung und die Krümmungen durch einfache Quadraturen berechnet werden, ohne daß die Spannungsverteilung im einzelnen bekannt ist.

Göttingen. Walter Wuest.

BUCHBESPRECHUNGEN

Arthur Linder (Prof. a. d. Univ. Genf und der ETH. Zürich), Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe Bd. 3), 2. erweiterte Auflage. 238 S. mit 42 Abb. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 26 Fr., geb. 30 Fr.

Zweck dieses Buches ist, eine Einführung in die neueren statistischen Prüfverfahren zu geben, die in den letzten dreißig Jahren in den angelsächsischen Ländern entwickelt sind. Da das Buch sowohl für den Praktiker wie für den theoretisch Interessierten bestimmt ist, wird zunächst in den ersten drei Abschnitten (Statistische Maßzahlen, statistische Prüfverfahren, Streuungszerlegung) die Art der Anwendung der Verfahren in der Hauptsache an Beispielen gezeigt, während erst das letzte (Theorie der Stichproben) die mathematischen Ableitungen durchgehend unter Benutzung der n-dimensionalen Geometrie gibt. Obwohl sich Verfasser auf die grundlegenden Verfahren beschränkt, scheint mir die Darstellung in diesem letzten Abschnitt etwas zu konzentriert; man möchte wünschen, daß etwas mehr Zwischenrechnungen eingefügt würden. Am Schluß hat Verfasser eine Reihe von Tafeln insbesondere solche der verschiedenen Standardverteilungen angefügt, die für die praktische Anwendung erforderlich sind.

Die vorliegende zweite Auflage ist gegenüber der ersten etwas erweitert. Neuaufgenommen sind Abschnitte über die Regressionsmethoden, die Trennverfahren, den verallgemeinerten Abstand und insbesondere über die Streuungszerlegung. — Das Buch kann sowohl dem praktischen Statistiker wie dem Mathematiker empfohlen werden.

Dresden. Willers.

R. Sauer (o. Prof. a. d. TH. München), Ecoulements des fluides compressibles. XVI + 307 S. mit 150 Abb. Paris et Liège 1951. Librairie polytechnique Ch. Béranger. Preis geb. 3,900 fr.

Der Autor hatte 1943 im Verlag Springer, Berlin, die „Theoretische Einführung in die Gasdynamik" herausgegeben (1951 in zweiter Auflage erschienen). Diese beschränkte sich jedoch nur auf die stationären Probleme. Als Ergänzung hierzu sollte gegen Ende des Krieges ein Buch erscheinen, das die nichtstationären Probleme zusammenfaßte. Es war bereits gesetzt, doch ist der Ausdruck nicht mehr erfolgt.

Die Mußestunden, die die erste Nachkriegszeit dem Autor zwangsweise brachte, hat er dazu benutzt, die beiden Abhandlungen zu einer einzigen zusammenzufassen. Diese hat daher den großen Vorteil, daß die nichtstationären Probleme von vornherein an geeigneten Stellen mit eingearbeitet sind. Dieses Manuskript ist dann ins Französische übersetzt worden.

Gegenüber der „Einführung in die theoretische Gasdynamik" (1951) enthält das Buch folgende neuen oder wesentlich erweiterten Kapitel:

Grundlagen der instationären Rohrströmung; Potential- und Stromfunktion der isentropischen Strömung; linearisierte Druckwellen; stationäre Überschallströmung mit Rotationssymmetrie oder nicht isentropisch; isentropische Druckwellen großer Intensität; starke Rohrwellen bei variablem Querschnitt oder variabler Entropie; Strömungsdiagramm für $K = \pm 1$ und $K = 3$; Gebrauchsanweisung für die Charakteristiken-Theorie; Grundgesetze der Stoßwelle; ebene Strömung mit homogenen Druckwellen; ebene und sphärische Explosionswellen.

Das Buch bietet in einer klaren Form eine ausgezeichnete Einführung in ein modernes Gebiet, das sonst nur in einer Reihe oft unzugänglicher Artikel in wissenschaftlichen Zeitschriften oder — noch weniger erreichbar — in Berichten wissenschaftlicher Institute seinen Niederschlag gefunden hat.

Weil a. Rh. Schardin.

R. Oldenburger (Ph. D.), Mathematical Engineering Analysis. XIV + 426 S. mit 220 Abb. New York 1950. The Macmillan Company. Preis 6,— $.

In der Praxis liegen die Schwierigkeiten für die Anwendung der Mathematik auf physikalische und technische Probleme vielfach im Herausarbeiten des mathematischen Kernes und der Aufstellung von Gleichungen, die der mathematischen Behandlung zugänglich sind. Dazu sind nicht nur gründliche Kenntnisse der theoretischen Physik und der in Frage

kommenden technischen Wissenschaften, sondern auch eine langjährige Erfahrung nötig, wie sie der Verf. hat. Der Zweck dieses Buches ist, diese Erfahrung den Studierenden zu übermitteln. In fünf Kapiteln „Mechanik starrer Körper, Elektrizität und Magnetismus, Wärmelehre, Elastizität und Strömungslehre" stellt Verf. zunächst die grundlegenden Gesetze der einzelnen Gebiete dar und zeigt anschließend an einer großen Zahl von Problemen, wie die mathematischen Ansätze zu machen sind, wie man dabei zu Gleichungen zwischen dimensionslosen Größen kommt, welche Vernachlässigungen in den einzelnen Fällen erlaubt sind, damit die mathematische Behandlung des Ansatzes mit den üblichen Methoden möglich wird usw. Auf die mathematische Behandlung selbst geht er nicht ein. Am Ende eines jeden Abschnittes sind eine große Anzahl von Problemen zusammengestellt für die am Schluß des Bandes die mathematischen Formulierungen bzw. Hinweise auf ihre Behandlung gegeben sind. So hat Verf., fußend auf seine längjährigen Erfahrungen, ein für den jungen Techniker sehr nützliches Buch geschaffen.

Dresden. Willers.

M. V. Wilkes, D. J. Wheeler and S. Gill, The preparation of programs for an electronic digital computer, with spezial reference to the EDSAC and the use of a library of subroutines. X + 170 S. m. 2 Abb. Cambridge (Mass) 1951. Addison-Wesley Press. Preis geb. 5,— $.

Bei Ausführung längerer Rechnungen treten immer wieder die gleichen Operationsfolgen auf. Diese kann man für die Ausführung mit einem Rechenautomaten ein- für allemal programmieren, um sie als Teilprogramme dann den einzelnen Gesamtprogrammen einzufügen. Das bietet den Vorteil, daß dadurch die Arbeit des Programmierens und die Fehlermöglichkeit für diesen Teil der Rechnung beträchtlich vermindert werden. Das vorliegende Buch enthält nun ins einzelne gehende Beschreibungen der Sammlung von Unterprogrammen, wie sie in Cambridge für den EDSAC benutzt werden, und schildert die Art, wie die Programmierung mit ihrer Hilfe vorgenommen wird. Gerade in Cambridge hat man auf diesem Gebiet wohl die reichsten Erfahrungen und verfügt über die umfangreichste Sammlung solcher Unterprogramme. Diskutiert wird hier der beste Weg, solche Unterprogramme für numerische Quadratur, genäherte Berechnung von Integralkurven und andere Prozesse herzustellen. Mehr theoretische Fragen, wie die Konvergenz iterativer Prozesse, die Anhäufung der Abrundungsfehler usw. werden nicht behandelt. Die Darstellung bezieht sich zunächst auf den EDSAC, doch sind Ideen und Technik auch für andere Maschinen, die nach den gleichen Grundsätzen gebaut sind, anwendbar, so daß jeder, der mit großen Rechenautomaten zu arbeiten hat, das Buch mit Vorteil benutzen wird.

Dresden. Willers.

Dr. Ing. habil. Kurt Nesselmann, „Die Grundlagen der angewandten Thermodynamik", XI + 320 S. mit 311 Abb. und 5 Diagrammen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis geb. 18,— DM.

Der Verfasser unternimmt wohl erstmalig den Versuch, die gesamte technische Thermodynamik geschlossen in einem einzigen Buche darzustellen. Während in der Regel die Autoren sich auf die allgemeine Thermodynamik, d. h. die Lehre von den Gasen und Dämpfen, beschränken, allenfalls noch die Wärmeübertragung streifen, bezieht der Verfasser in der richtigen Erkenntnis der immer mehr in den Vordergrund tretenden chemischen Erfahrungstechnik auch die sogenannte chemische Thermodynamik ein. So behandelt das Buch außer der allgemeinen Thermodynamik und der Wärmeübertragung u. a. die Gleichgewichte der Mehrstoffgemische der festen, flüssigen und gasförmigen Phase, die destillativen Trennverfahren, die Wärmetönung, das chemische Gleichgewicht einschl. dritten Hauptsatz und den Stoffaustausch durch Diffusion.

Bei der Fülle des Stoffes konnte es nicht ausbleiben, daß das Werk in manchen Teilen infolge der Gedrängtheit der Darstellung skizzenhaft erscheint; verschiedentlich wäre ein tieferes Eindringen in die Materie wünschenswert gewesen. Manche wichtigen Gebiete wurden allzu knapp behandelt (z. B. die Reaktionskinetik auf einer halben Seite, die Gasstrahlung auf einer Seite), andere fehlen ganz (z. B. die destillative Trennung durch Teilniederschlag, die Solventtrennung, die unvollständige Verbrennung). Das Buch enthält bedauerlicher Weise eine große Zahl von Druckfehlern, die das an sich nicht einfache Studium empfindlich stören, und ist auch nicht ganz frei von Irrtümern. Trotz dieser bei einer Erstbearbeitung verständlichen Schwächen muß anerkannt werden, daß es dem Verfasser durch straffe, übersichtliche Gliederung, weise Beschränkung auf die rein thermodynamischen Entwicklungen, verbunden mit einer klaren Darstellung des Stoffes, und die Ergänzung desselben durch eingestreute geschickt gewählte Rechenbeispiele im ganzen gelungen ist, das gesteckte Ziel einer einheitlichen Behandlung der gesamten technischen Thermodynamik zu erreichen und der Fachwelt damit ein dankenswertes Hilfsmittel zu schenken.

Dresden. Faltin.

Th. L. Wade, The Algebra of Vectors and Matrices. XII + 189 S. m. 10 Abb. Cambridge (Mass.) 1951. Addison Wesley Press. Preis geb. 4,50 $.

Das Buch bietet eine elementare, relativ einfache, gut lesbare Einführung in die für alle Anwendungsgebiete wichtige Algebra der Vektoren und Matrizen, wobei die Grundbegriffe der modernen Algebra, wie Gruppe, Feld, Ring, Basis, Dimension, Isomorphismus usw. eingeführt werden, so daß es sowohl als Vorbereitung für die höhere Algebra wie die Vektor- und Matrizenrechnung dienen kann. Vorausgesetzt wird eine gewisse Vertrautheit mit der analytischen Geometrie und den einfachsten Sätzen über Determinanten. Eine Übersicht über den behandelten Stoff mögen die Kapitelüberschriften geben: Grundbegriffe; Vektoren im zwei- und im dreidimensionalen Raum; Vektormethoden in der analytischen Geometrie; lineare Abhängigkeit von Vektoren; Vektoren in n-Dimensionen; elementare Eigenschaften von Matrizen; spezielle Matrizen; Gruppen, Matrizen und Transformationen; die charakteristische Gleichung einer Matrix; Matrizen und algebraische Formen; einige Anwendungen der Matrizenalgebra. Überall eingefügte Übungsaufgaben dienen der Einübung und der Vertiefung des dargebotenen Stoffes.

Das ausgezeichnete Büchlein gibt so den Stoff einer Einführungsvorlesung, wie sie für die ersten Semester gehalten werden sollte. Es sei vor allem den Anfangssemestern empfohlen.

Dresden. Willers.

Dr. F. Neiss, (Prof. a. d. Humboldt-Univ. Berlin), Analytische Geometrie. VIII + 167 S. mit 64 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis brosch. 9,60 DM.

Das vorliegende Buch arbeitet weitgehend mit den Hilfsmitteln der linearen Algebra. Da es jedoch als Lehrbuch für Studierende gedacht ist, ist der eigentlichen Darstellung eine elementare Einführung vorangestellt, in der noch keine höheren Hilfsmittel verwendet werden, die aber die Tragweite der elementaren Methoden aufzeigt und dem künftigen Lehrer wertvolle Hinweise für die Gestaltung seines Unterrichts geben kann. Für den wesentlichen Teil seines Buches befindet sich Verf. in der günstigen Lage,

ständig auf sein bewährtes Buch über „Determinanten und Matrizen" hinweisen zu können. Es gelingt so, den gesamten Stoff auf reichlich 100 Seiten zu bringen und den Leser davor zu bewahren, daß die Aufmerksamkeit durch Erörterungen über den Kalkül abgelenkt wird. Die nötigen Rechnungen können mit großer Eleganz durchgeführt werden, und der geometrische Inhalt steht stets im Vordergrund.

Nach einer Überleitung (Geometrie der Geraden und Ebene) folgen zwei Kapitel über kongruente und ähnliche Abbildungen sowie über die projektive Geometrie der linearen Gebilde, das Zentralstück des Buches hinsichtlich Umfang und Bedeutung. Anschließend werden die Kurven und Flächen zweiter Ordnung behandelt. Jedem Kapitel sind eine Anzahl Übungs- und Ergänzungsaufgaben beigegeben, z. B. Aufgaben zu den kongruenten Abbildungen, die auf gruppentheoretische Gesichtspunkte hinweisen.

So ist ein Buch entstanden, das der Leser nicht nur mit großem Gewinn, sondern auch mit großem Genuß durcharbeiten wird. Die Ausstattung des Buches hinsichtlich Druck, Papier und Deutlichkeit der Abbildungen ist sehr gut.

Dresden. G. Opitz.

Heinz Rutishauer, Ambros Speiser, Eduard Stiefel, Programmgesteuerte digitale Rechengeräte (elektronische Rechenmaschinen). (Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik an der eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, Nr. 2.) 102 S. mit 28 Abb. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis 8,50 Schweizer Franken.

Es handelt sich bei dieser Veröffentlichung um einen Separatdruck eines Berichtes der Verfasser in der Z. angew. Math. Phys., Bd. I, S. 277—297, 340 bis 362; Bd. II, S. 1—25, 63—92.

Erstmalig wird hier von berufener Seite in deutscher Sprache ein umfassender Überblick über die Entwicklung und den Aufbau programmgesteuerter (meist elektronischer) Ziffernrechenautomaten gegeben.

Nach einer Einführung in die allgemeinen Grundprinzipien werden Organisation und Arbeitsweise, die arithmetischen Prinzipien, Fertigung von Rechenplänen und schließlich auch die physikalischen Grundlagen bestehender Maschinen behandelt. Überall ist dabei die reiche persönliche Erfahrung der Verfasser über den Gegenstand spürbar. In übersichtlicher und straffer Darstellung wird der Leser bis unmittelbar an die zugehörige Spezialliteratur herangeführt, deren Aufsuchen ein umfangreiches Literaturverzeichnis erleichtert.

Eine Tafel mit 18 bekannt gewordenen Rechenautomaten und Mitteilungen über behandelte Aufgaben illustrieren Bedeutung und den rasch zunehmenden Umfang dieser automatisierten Rechentechnik. Es ist hervorzuheben, daß in diesem Bericht neben den amerikanischen und englischen Pionierarbeiten auch die davon unabhängigen und erfolgreichen Konstruktionen des deutschen Ingenieurs Konrad Zuse gewürdigt werden.

Dresden. N. Joachim Lehmann.

Lynde Phelps Wheeler. Josiah Willard Gibbs. The history of a great mind. XI + 264 S. mit 9 Taf. New Haven 1951. Yale University Press. Preis 4,— $.

Nachdem Gibbs' Schüler Lynde Wheeler (Assoc. Prof. of Physics an der Yale University) vor vier Jahren an der Schrift über „The early work of Willard Gibbs in applied mechanics" mitgewirkt hat, legt er jetzt zur 250-Jahrfeier von Yale eine gerundete Biographie von J. W. Gibbs (1839—1903) vor. Mit Fleiß und Umsicht hat er Gibbs' wissenschaftlichen Nachlaß und Familienpapiere benutzt und ein auch das Menschliche treffendes Bild von Gibbs' Leben und Werk gezeichnet. Wir sehen nunmehr, daß Gibbs nicht der „Mathematiker in einem Turm" gewesen, sondern in regem geistigen Austausch mit den Fachgelehrten der Neuen und der Alten Welt gestanden hat, und daß Gibbs' Bedeutung als Thermodynamiker und als Vater der Phasenlehre schon zu Lebzeiten von Männern wie Lord Kelvin, Wilhelm Ostwald und James Clerk Maxwell erkannt worden ist.

Hingewiesen sei noch auf die z. T. methodisch interessanten Anhänge des Buches: 1. Genealogische Tafel; 2. Gibbs' erste bislang unveröffentlicht gebliebene Arbeit vom Jahre 1866 über „The proper magnitude of the units of length, and of other quantities used in mechanics"; 3. Katalog der Wissenschaftlichen Korrespondenz von Gibbs; 4. Gibbs' Postlisten seiner von ihm an Personen und Zeitschriften-Redaktionen verschickten Bücher und Abhandlungen; 5. Referat für Koenigsbergers „Repertorium" über Gibbs' Abhandlung „On the fundamental formulae of dynamics" (1879); 6. Bibliographie der Arbeiten über Gibbs, die — zwar nicht vollständig [1]) — das wachsende Interesse an dem großen Amerikaner zeigt. — Den reichen Inhalt schließt ein Register auf, in das leider nicht die von Gibbs hier und da falsch geschriebenen Personennamen seiner Korrespondenten und der Postlisten aufgenommen sind.

Radebeul/Dresden. Rudolph Zaunick.

[1]) Wir vermissen hier ungern u. a. A. Euckens aufschlußreichen „Versuch, das Lebenswerk W. Gibbs der Gegenwart nahe zu bringen" (in: Naturwiss. Bd. 26 (1938), S. 230—238 und W. Nernsts „Erinnerung an den 100. Geburtstag von Gibbs" (ebenda Bd. 27 (1939), S. 393 f.)

Dr.-Ing. R. C. Oldenbourg und Dr.-Ing. H. Sartorius, Dynamik selbsttätiger Regelungen. Band I. Allgem. und mathem. Grundlagen. Stetige und unstetige Regelungen. Nichtlinearitäten. 2. Aufl. 258 S. mit 112 Abb. und 1 Tafel. München 1951. Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 26,— DM.

Die erste Auflage dieses Buches erschien 1944 und war schnell vergriffen; 1948 wurde in den USA ein Nachdruck hergestellt. Beides beweist, wie notwendig eine Darstellung der theoretischen Regelungstechnik benötigt wird, die mathematische Hilfsmittel verstärkt auszunutzen versteht.

Gleich zu Beginn wird mit Hilfe der Laplacetransformation der Zusammenhang zwischen den üblichen Beschreibungsformen von Regelgliedern mit Differentialgleichungen und Integraldarstellungen, sowie dem Frequenzgang hergestellt und in ingenieurmäßiger Form das Rüstzeug zur Durchrechnung automatischer Regelaufgaben bereitgestellt. Im Hinblick auf die physikalische, anschauliche Bedeutung wird dabei besonders die Übergangsfunktion der Regelsysteme herangezogen. Für die Stabilitätsuntersuchungen aus dem Frequenzgang wird das Nyquist-Kriterium zur Verfügung gestellt.

Einen Überblick über den reichhaltigen Inhalt vermitteln einige Stichworte:

Mathematische Grundlagen, Stabilitätskriterien, Anwendung von Übergangsfunktion und Frequenzgang, Güte der Regelung, Stetige Regler (Elemente, Stabilisierung, Optimaler Regelverlauf), Nichtlinearitäten (Ansprechempfindung, Reibung und Lose), Unstetige Regelungen, Anwendungsbeispeile.

Mit diesem reichhaltigen Inhalt und der besonderen Zielsetzung beim Einsatz der mathematischen Hilfsmittel hat das Buch trotz aller Fortschritte der Regeltechnik bis heute seinen Wert behalten.

Zum Schluß soll auf einige Fehler hingewiesen werden: Die Integraldarstellung 38,3 für den geschlossenen Regelkreis hat nur die Lösung $z = 0$ (mit 17,7—8 als homogene Volterra-Gleichung 2. Art), es muß von 39,4 ausgegangen werden. Das angegebene Nyquist-Kriterium ist nur unter zusätzlichen Voraussetzungen allgemein richtig. N. J. Lehmann.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr.-Ing. habil. Dr. **Horst Müller,** Mechanik für Ingenieure. (Westermanns Fachbücher der Ingenierkunde), 254 S. mit 268 Abb. Braunschweig/Berlin/Hamburg/Kiel 1951. Georg Westermann Verlag. Preis geh. 16,60 DM., geb. 18,60 DM.

Hermann Hömberger, Einführung in die Elektrotechnik. (Westermanns, Fachbücher der Elektrotechnik). 302 S. mit 277 Abb. Braunschweig/Berlin/Hamburg/Kiel 1951. Georg Westermann Verlag.

Walter Schnee, Über magische Quadrate und lineare Gitterpunktprobleme. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaft zu Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 98, Heft 1) 48 S. Berlin 1951. Akademie-Verlag. Preis brosch. 4,65 DM.

H. Goldstein, Ph. D., Classical Mechanics. XII + 398 S. mit 71 Abb. Cambridge (Mass.) 1951. Addison Wesley Press. Preis geb. 7,— $.

D. J. Struik, (Prof. a. Massachusetts Inst. of Technology). Lectures on Classical Differential Geometry. VIII + 221 S. mit 120 Abb. Cambridge (Mass.) 1950. Addison Wesley Press. Preis geb. 6,— $.

L. Landau und E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields (aus dem Russischen übersetzt von M. Hamermesh). IX + 354 S. mit 12 Abb. Cambridge (Mass.) 1951. Addison Wesley Press. Preis geb. 7,50 $.

Dr. K. Federhofer (o. Prof. a. d. TH. Graz), Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. II. Teil: Kinematik und Kinetik des Punktes. 113 Aufgaben mit Lösungen. IV + 103 S. mit 105 Abb. III. Teil: Kinematik und Kinetik starrer Systeme. 149 Aufgaben mit Lösungen. V + 139 S. mit 191 Abb. Wien 1951. Springer-Verlag. Preis je 9,60 DM.

Dr. L. F. Ryan, Experiments on Aerodynamic Cooling und **M. Degen,** Untersuchungen an einem Gegenlaufpropeller im Windkanal. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH. Zürich, Nr. 18) 65 S. mit 47 Abb. Zürich 1951. Verlag Leemann.

R. Richter (em. Prof. a. d. TH. Karlsruhe), Elektrische Maschinen, Band I: Allgemeine Berechnungselemente. Die Gleichstrommaschine. 2. verbesserte Auflage. XVI + 630 S. mit 453 Abb. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 45,25 Fr., geb. 49,40 Fr.

Dr. H. von Sanden (o. Prof. a. d. TH. Hannover), Praktische Mathematik (Teubners mathematische Leitfäden Bd. 44). 2. erweiterte Auflage. 120 S. mit 25 Abb. Leipzig 1951. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. Preis kart. 3,80 DM.

F. Lösch-F. Schoblik, Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. (Bearbeitet von Dr. F. Lösch, Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart.) VI + 205 S. mit 22 Abb. Leipzig 1951. Teubners-Verlagsgesellschaft. Preis geb. 16,80 DM.

Dr. L. Bieberbach (ehem. Prof. a. d. Univ. Berlin). Einführung in die Funktionentheorie. Zweite neubearbeitete Aufl. 220 S. mit 43 Abb. Bielefeld 1952. Verlag für Wissenschaft und Fachbuch. Preis 12,60 DM.

NACHRICHTEN

Viktor Blaess †

Kurz vor Vollendung seines 75. Lebensjahres, die er am 12. September gefeiert hätte, starb am 16. August 1951 der emeritierte Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Darmstadt, Dr.-Ing. Viktor Blaess. Fast durch 4 Jahrzehnte, von 1911 bis 1919 als Privatdozent und a. o. Prof. und von 1919 bis 1949 als o. Prof., hatte der Verstorbene an der T. H. Darmstadt gewirkt, und viele Hunderte von Schülern aller Fakultäten hatten seine pädagogisch hervorragenden Vorlesungen gehört und das von ihm vermittelte reiche Wissen verwerten können. Gerade eine glückliche Vereinigung von pädagogischem Können und wissenschaftlicher Tiefe gab seinen Vorlesungen eine besondere Note und bewirkte, daß sie einem großen Kreis deutscher und ausländischer Ingenieure als Grundlage für weitere Erkenntnisse dienen konnten.

Außer der allgemeinen Mechanik hatte sich Blaess besonders der Technischen Schwingungslehre gewidmet und kann in diesem Gebiet ein Bahnbrecher genannt werden. Denn schon während des Ersten Weltkrieges hatte er sich mit kritischen Drehzahlen rotierender Maschinenteile und mit Fundamentschwingungen beschäftigt und kurz nach seiner Berufung an die T. H. Darmstadt durch seine Arbeiten die Erkenntnisse in der Auswuchttechnik wesentlich gefördert. Besonders das Auswuchten von großen Maschinen in ihren eigenen Lagern ohne Ausbau der rotierenden Teile ist auf ihn zurückzuführen. Genannt sei hierbei sein in der ZaMM 1926 erschienener Aufsatz über den „Massenausgleich rasch umlaufender Körper“. Bekannt ist auch der von ihm entwickelte mechanische Resonanz-Schwingungsmesser.

Von seinen bis zur letzten Anschaulichkeit vordringenden Bemühungen legen die vielen von ihm konstruierten Modelle, z. B. des ebenen Spannungstensors und solche zur Darstellung von Schwingungserscheinungen beredtes Zeugnis ab. Sie vertieften den Vorlesungsstoff ungemein und gestalteten seine Darlegungen für seine vielen Schüler zu einem unvergeßlichen Erlebnis.

Weiterhin fand Blaess im Jahre 1934 ein besonderes Verfahren zur angenäherten Lösung von Differentialgleichungen, das als das Blaesssche Verfahren in die Literatur einging und neben dem Verfahren von Runge-Kutta-Nyström das der Praxis wohl am besten zugängliche ist.

Von seinen Arbeiten auf anderen Gebieten sei hier nur noch sein 1911 im Verlag Oldenbourg erschienenes Buch über die Berechnung verzweigter Rohrleitungen für Luft und Gase erwähnt, das besonders damals von großer Wichtigkeit war.

Wer das Glück hatte, Prof. Blaess trotz seiner etwas schwer zugänglichen Wesensart persönlich näher kennen zu lernen, dem offenbarte sich ein selten lauterer Charakter, ein freundlich gütiger und liebenswürdiger

Mensch, dessen wunderbarem Einfluß man sich nicht entziehen konnte. Mehr als sonst ist bei Blaess der Grundsatz „mehr sein als scheinen“ verwirklicht gewesen.

Darmstadt. K. Karas.

IV. Kongreß der Italienischen Mathematiker-Vereinigung in Taormina vom 25. bis 30. Oktober 1951.

Unter dem Protektorate des Präsidenten der Italienischen Republik hatte sich ein Ehrenkomitee von 18 Persönlichkeiten aus den Spitzen der Verwaltung, der Industrie und der Wissenschaft gebildet, das die materiellen Vorbedingungen für das Zustandekommen dieses Kongresses geschaffen hat. Der alle Erwartungen überschreitende Verlauf wird allen Teilnehmern unvergeßlich bleiben. Es waren über 300 italienische und mehr als 30 auswärtige Mathematiker erschienen, die sich zu einer Einheit zusammenfanden, die in jedem Sinne als eine Keimzelle störungsfreier internationaler Zusammenarbeit angesehen werden kann. Außer einer Anzahl von allgemeinen Vorträgen in allgemeinen Sitzungen wurden in 5 Sektionen: Analysis, Geometrie, Mechanik u. math. Physik, Wirtschaftsmathematik, Philosophie und Didaktik über 100 Vorträge geboten. Durch die auswärtigen Teilnehmer waren die folgenden Staaten vertreten: Belgien (2), Frankreich (6), Holland (1), Österreich (8), USA (3), Schweden (1), Spanien (2), Deutschland (8), Polen (2). Der Wunsch, daß sich auch die übrigen Staaten der Welt auf dem Boden der mathematischen Wissenschaften zusammenfinden mögen, blieb leider diesmal noch unerfüllt, doch konnte hier an einem Beispiel ersehen werden, daß eine solche Vereinigung durchaus im Bereich der Möglichkeiten liegt und auch über die fachlichen Interessen hinaus den Boden zu einer allgemeinen Verständigung der Menschheit bilden könnte. Was das Land Italien hier geboten hat, lag nicht nur auf dem Boden der Mathematik, sondern auch auf dem der Kultur und der Geschichte des Landes, die den einzigartigen Rahmen für eine Veranstaltung abgaben, der sonst kaum irgendwo in der Welt etwas Ähnliches an die Seite gestellt werden kann. Th. Pöschl, Karlsruhe.

Im Anschluß an den Kongreß der Unione Matematica Italiana (25.—30. 10. 51 in Taormina) folgten Prof. Dr. L. Collatz, Hannover, und Prof. Dr. H. Görtler, Freiburg i. Br., am 2. und 3. 11.51 einer Einladung zu Vorträgen am Mathematischen Institut der Universität Triest.

Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Berlin vom 16. bis 21. September 1951.

Die Tagung war mit rund 200 Teilnehmern wohl die am stärksten besuchte, welche die DMV je veranstaltet hat. Eine Reihe ausländischer Gäste konnte begrüßt werden, darunter auch Kollegen, die früher in Berlin tätig waren und nun wieder an der Tagung der DMV teilnahmen.

Rund 50 Vorträge legten Zeugnis ab von dem lebendigen Leben und den Fortschritten in der mathematischen Forschung. Einstündige Hauptvorträge hielten die Herren

Kähler-Leipzig: Die Einheitlichkeit der mathematischen Wissenschaften.

R. v. Mises-Cambridge, USA: Die Theorie der statistischen Funktionen.

H. Hopf-Zürich: Vom Bolzano-Kroneckerschen Satz zur Homotopietheorie der Sphären.

Eichler-Münster: Arithmetische Theorie der quadratischen Formen und Thetafunktionen.

Außerdem wurden Vorträge aus folgenden Gebieten gehalten: Komplexe Funktionentheorie, Geometrie einschließlich Diff.-Geom. und algebr. Geom., Integralgleichungen, partielle und gewöhnliche Diff.-Gleichungen und Rand- und Eigenwertaufgaben, Algebra, Gruppentheorie, Zahlentheorie, Summierungsverfahren, Mengenlehre und andere Einzelfragen.

Kamke.

Ein internationales Symposion über nichtlineare Schwingungen fand vom 18. bis 22. Sept. 1951, veranstaltet von der IUTAM[1]) und unterstützt von der Unesco, auf der Ile de Porquerolles (im Mittelmeer bei Toulon) statt. Aus 12 Ländern nahmen 35 einzeln Eingeladene teil, darunter aus Deutschland (je mit einem Vortrag) die Herren Collatz, Grammel und Mettler. Präsident war Professor Pérès-Paris, die Organisation lag in den Händen eines Komitees mit Professor Koiter-Delft als Sekretär. Diesem Organisationskomittee gehörte deutscherseits Herr Grammel an. Die 18 Vorträge umfaßten alle Teile des in den letzten zwei Jahrzehnten stark weiterentwickelten Gebietes der nichtlinearen Schwingungen von einem bis zu unendlich vielen Freiheitsgraden, und zwar von der abstrakt mathematischen Theorie bis zu ihren Anwendungen. Der persönliche Kontakt zwischen den Teilnehmern war sehr eng und herzlich und wurde durch den genius loci dieser schönen, abseits von Lärm und Verkehr liegenden Insel gefördert. Ein Kongreßbericht mit ausführlichen Vortragsauszügen wird in Frankreich erscheinen.

[1]) International Union of the theoretical and applied Mechanics.

Stuttgart: Der o. Prof. an der Techn. Hochschule Aachen Dr. Günther Schulz hat einen Ruf auf den durch die Emeritierung von Prof. Dr. Friedrich Pfeiffer frei gewordenen Lehrstuhl für Mathematik an der Techn. Hochschule Stuttgart angenommen.

München: Am 4. Dez. 1951 verstarb im 90. Lebensjahre Geh.-Rat Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder. Er war seit 1891 o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München (em. 1932) und seit 1903 Mitglied der Bayrischen Akademie der Wissenschaften.

Der apl. Prof. Wilhelm Maak wurde als o. Prof. der Mathematik an die Univ. München berufen.

Dresden: An der Techn. Hochschule Dresden habilitierte sich Dr. N. J. Lehmann für das Fach der angew. Mathematik.

Wien: In der Zeit vom 9. bis 14. Sept. 1952 findet in Salzburg der 3. Österreichische Mathematikerkongreß statt, der wieder als internationales Mathematikertreffen gestaltet werden soll. Für seine wissenschaftl. Arbeit werden folgende Sektionen gebildet: Analysis, Geometrie und Topologie, Algebra und Zahlentheorie, angew. Mathematik, Geschichte und Philosophie.

Bloomington: Von Januar 1952 ab wird eine neue Zeitschrift „Journal of Rational Mechanics and Analysis“ von den Herren T. Y. Thomas und C. Truesdell vom Graduate Institute for Applied Mathematics der Indiana Universität in Bloomington herausgegeben werden.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher Sammelnummer: 42 55 71. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/32/2/3. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1207 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. Satz und Druck: Thüringer Volksverlag, Werk II, Zweigniederlassung Langensalza (57 275 4022) (1).
Printed in Germany.